

СОДЕРЖАНИЕ

1	Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	3
1.1	Классификация методов решения алгебраических уравнений	3
1.2	Методы последовательного исключения неизвестных. Методы Гаусса	3
1.2.1	Метод Гаусса с ведущим элементом	4
1.2.2	Метод Гаусса с выбором главного элемента	4
1.2.3	Метод квадратного корня	5
1.2.4	Схема Халецкого	7
1.2.5	Метод прогонки	8
1.3	Вычисление обратных матриц и определителей	10
2	Итерационные методы решения СЛАУ	11
2.1	Метод простой итерации	11
2.2	Условие сходимости метода простой итерации	12
2.3	Метод Зейделя	14
2.4	Каноническая форма итерационного процесса	17
2.5	Метод минимальных невязок	18
2.6	Метод скорейшего спуска	19
3	Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы	20
3.1	Характеристический многочлен матрицы	20
3.2	Метод Крылова	21
3.3	Вычисление собственных векторов по методу Крылова	22
3.4	Метод Данилевского	23
3.5	Вычисление собственных векторов по методу Данилевского	24
4	Итерационные методы решения полной проблемы собственных значений	26
4.1	Введение	26
4.2	Метод вращений Якоби	27
4.3	Итерационные методы определения частичной проблемы собственных значений, собственных векторов матрицы	29
5	Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений первого порядка и их систем	35
5.1	Схема Эйлера	35
5.2	Модификации метода Эйлера	36
5.3	Разностные схемы Рунге- Кутта	40
5.4	Разностные схемы Адамса	44
6	Разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка	48
6.1	Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка	48
6.2	Погрешность аппроксимации. Сходимость и точность схем	49
6.3	Аппроксимация краевых условий третьего рода	52
6.4	Метод стрельбы	53
6.5	Метод конечных разностей	54
6.6	Метод прогонки	56
7	Решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных	59
7.1	Сетка и сеточные функции	59
7.2	Равномерная сетка на отрезке	59
7.3	Равномерная сетка на плоскости	59
7.4	Численные методы решения дифференциальных уравнений эллиптического типа	61
7.5	Первая краевая задача для уравнения Пуассона	62
8	Разностные схемы с весами для дифференциальных уравнений теплопроводности	67
8.1	Разностная аппроксимация задачи	67
8.2	Погрешность аппроксимации	70
9	Разностные схемы с весами для уравнения колебания струны	72
9.1	Постановка задачи и разностная аппроксимация	72

9.2 Погрешность аппроксимации. Вычислительная схема решения задачи	73
--	----

Лекция №1

1 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

1.1 Классификация методов решения алгебраических уравнений

К системам линейных алгебраических уравнений приводятся многие задачи численного анализа. Из курса высшей алгебры известно, что существуют различные способы решения линейных систем однако ещё и сейчас трудно указать способы, наиболее эффективные с точки зрения быстроты получения решения с достаточной степенью точности, а при использовании ЭВМ при требовании минимального объема памяти. Известное правило Крамера в этом смысле не выгодно, т.к. требует достаточно большого числа арифметических действий (порядка $n^2n!$ умножений и делений, где n – порядок системы). Следовательно для решения больших систем необходимо выбрать другой способ вычисления неизвестных и сделать его менее трудоемким.

Используемые практически методы решения систем линейных алгебраических уравнений подразделяют на две группы:

- 1) так называемые **точные методы**;
- 2) **итерационные методы** (методы последовательных приближений).

Точные методы характеризуются тем, что для любых систем позволяют найти точные значения неизвестных после конечного числа арифметических операций, каждая из которых выполняется точно.

Чаще всего эти методы реализуются в два этапа. На первом этапе преобразуют систему к одному из простых видов. На втором решают упрощенную систему и получают значения неизвестных.

Итерационные методы характеризуются тем, что точное решение получают в них в результате бесконечного процесса приближений.

Особое место среди них занимают вероятностные методы. Отметим, что классы задач, для решения которых обычно применяются методы вышеуказанных групп можно условно назвать классами задач с малым, средним, большим числом неизвестных.

В настоящее время, точные методы целесообразно применять, когда порядок системы $n \leq 10^3$ и итерационные, если $n \leq 10^6$.

1.2 Методы последовательного исключения неизвестных. Методы Гаусса

Рассмотрим задачу решения систем уравнений $Ax = b$, $A = [a_{ij}]$ – матрица размерности $m \times m$, $\det A \neq 0$, $b = (a_{1,m+1}, a_{2,m+1}, \dots, a_{m,m+1})^T$.

Метод решения задачи относится к классу точных, если в предположении отсутствия округления он дает точное решение задачи после конечного числа арифметических и логических операций. Для полностью заполненной матрицы системы при использовании точных методов требуемое число операций имеет порядок m^3 . Поэтому необходимо, чтобы такой порядок числа операций был приемлем для данной ЭВМ. Другие ограничения определяются структурой и объемом памяти ЭВМ. Наиболее известными из точных методов решения СЛАУ являются методы Гаусса.

1.2.1 Метод Гаусса с ведущим элементом

Рассмотрим схему исключения неизвестных с ведущим элементом. Полагая, что в системе уравнений $a_{11} \neq 0$, первое уравнение системы

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = a_{i,m+1} \quad (i = \overline{1, m}), \quad (1)$$

делим на коэффициент $a_{11} \neq 0$, в результате чего получаем уравнение

$$x_1 + \sum_{j=2}^m a_{ij}^{(1)} x_j = a_{i,m+1}^{(1)}$$

Для системы третьего порядка это выглядит так:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= a_{14} \\ x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 &= \frac{a_{14}}{a_{11}} \end{aligned}$$

Затем из каждого из остальных уравнений вычитается первое уравнение, умножается на соответствующий коэффициент a_{i1} . В результате эти уравнения преобразуются к виду:

$$\sum_{j=2}^m a_{ij}^{(1)} x_j = a_{i,m+1}^{(1)} \quad (i = \overline{2, m})$$

Первое неизвестное оказалось исключенным из всех остальных уравнений, кроме первого. В результате мы получили систему эквивалентную системе (1).

Далее предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$, делим второе уравнение на коэффициент $a_{22}^{(1)}$ и исключаем неизвестное x_2 из всех уравнений, начиная с третьего и т. д. В результате последовательного исключения неизвестных система уравнений (1) преобразуется к треугольному виду.

$$x_i + \sum_{j=1}^m a_{ij}^{(1)} x_j = a_{i,m+1}^{(1)} \quad (i = \overline{1, m}). \quad (2)$$

Исключение x_i происходит в результате следующих операций:

- 1) деления $i - \hat{i} \tilde{a}$ уравнения на $a_{ii}^{(i-1)}$;
- 2) вычитания $i - \hat{i} \tilde{a}$ уравнения, умножаемого на $a_{ik}^{(i-1)}$, $k = i + 1, i + 2, \dots, m$.

Таким образом, выполнен прямой ход схемы Гаусса, в результате которого мы получили треугольную матрицу (верхнюю, правую). Обратным ходом находятся неизвестные x_m, x_{m-1}, \dots, x_1 , используя уравнение (2).

1.2.2 Метод Гаусса с выбором главного элемента

Его отличие от описанного выше метода состоит в следующем: Пусть по ходу исключения неизвестных получена система уравнений

$$x_i + \sum_{j=i+1}^m a_{ij}^{(1)} x_j = a_{i,m+1}^{(1)}, \quad (i = \overline{1, k})$$

$$\sum_{j=i+1}^m a_{ij}^{(k)} x_j = a_{i,m+1}^{(k)}, \quad (i = k+1, k+2, \dots, m)$$

Найдем такое l , что

$$|a_{k+1,l}^{(k)}| = \max_j |a_{k+1,j}^{(k)}|$$

и переобозначим $x_{k+1} = x_l$, $x_l = x_{k+1}$. Далее произведем исключение неизвестной x_{k+1} из всех уравнений, начиная с $k+2 - \hat{i} \tilde{a}$. Такое преобразование, приводит к изменению порядка исключения неизвестных и существенно уменьшает чувствительность решения к операциям округления при вычислении.

1.2.3 Метод квадратного корня

Метод квадратного корня и схема Халецкого основаны на разложении матрицы на произведение двух треугольных (нижних и верхних). Чтобы это разложение было единственным, исходная матрица должна быть невырожденной, а на главных диагоналях треугольных матриц должны быть заданы условия на коэффициенты.

В методе квадратного корня полагают, что коэффициенты на главных диагоналях S_{ii} равны $\overline{S_{ii}}$.

Пусть матрица A системы уравнений

$$Ax = f \quad (3)$$

является эрмитовой, т. е. совпадает с комплексно сопряженной транспонированной матрицей $A^* = A$ (A - симметричная). Представим матрицу A в виде:

$$A = S^* DS, \quad (4)$$

где S - правая треугольная матрица, S^* - сопряженная к ней:

$$S_{ii} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ 0 & S_{22} & S_{23} \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix}$$

Причем все $S_{ii} > 0$. D - диагональная матрица

$$D_{ii} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

где $d_{ii} = 1 \text{ ёё } \hat{a} - 1$.

В матричном равенстве (4) для эрмитовых матриц достаточно провести сравнение элементов для главной диагонали и справа от нее, следовательно, можно записать систему $\frac{1}{2}n(n+1)$ - уравнений. Учитывая, что S^* - нижняя треугольная матрица

$$S^* = \begin{pmatrix} \overline{S_{11}} & 0 & 0 \\ \overline{S_{21}} & \overline{S_{22}} & 0 \\ \overline{S_{31}} & \overline{S_{32}} & \overline{S_{33}} \end{pmatrix}$$

и $S_{ii} = \overline{S_{ji}}$.

Из равенства (3) можем записать:

$$\begin{cases} \overline{S_{1i}}d_{11}S_{1j} + \overline{S_{2i}}d_{22}S_{2j} + \dots + \overline{S_{ii}}d_{ii}S_{ij} = a_{ij} & (i < j) \\ |S_{1i}|^2 d_{11} + |S_{2i}|^2 d_{22} + \dots + |S_{ii}|^2 d_{ii} = a_{ij} & (i = j) \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (5)$$

Откуда, при $i = j = 1$, второе уравнение из (5) дает $|S_{11}|^2 d_{11} = a_{11}$. Чтобы удовлетворять ему надо положить $d_{11} = \text{sign } a_{11}$, тогда $S_{11} = \sqrt{a_{11}}$. Знак корня – произвольный, следовательно его можно взять со знаком $\ll + \gg$. Из первого

уравнения системы (5) получаем $\overline{S_{ij}} = \frac{a_{ij}}{d_{11}S_{11}}$ ($j = 2, \dots, n$), если $S_{11} \neq 0$.

Из второго уравнения системы (5) при $i = 2$

$$|S_{12}|^2 d_{11} + |S_{22}|^2 d_{22} = a_{22}$$

Откуда, находим $d_{22} = \text{sign}(a_{22} - |S_{12}|^2 d_{11})$, где $S_{22} = \sqrt{|a_{22} - |S_{12}|^2 d_{11}|}$.

Продолжая процесс вычислений дальше, получим рекуррентные формулы для определения элементов d_{ii} и S_{ii} .

$$\begin{cases} d_{ii} = \text{sign} \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |S_{ki}|^2 d_{kk} \right) \\ S_{ii} = \sqrt{|a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |S_{ki}|^2 d_{kk}|} & i > 1 \\ \overline{S_{ij}} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{S_{ki}} d_{kk} S_{kj}}{d_{ii} S_{ii}} & (i < j, j = i + 1, \dots, n) \end{cases} \quad (6)$$

Так как, матрицы S и D определены, то заданная система (3) может быть решена следующим образом:

$$Ax = S^* D S x = (S^* D) S x = B y = f,$$

где $S^* D = B$ – есть левая треугольная матрица и $y = S x$ – вспомогательный вектор. Решение системы $Ax = f$ равносильно решению двух треугольных систем

$$B y = f \quad \text{и} \quad S x = y. \quad (7)$$

Отметим, что в случае положительно определенной матрицы системы ($A > 0$), все $d_{ii} = 1$. Матрица называется положительно определенной, если все ее главные миноры больше нуля, тогда $A = S^* S$.

Замечание: Если полученное первое решение исходной системы x^1 сильно искажено погрешностью при вычислении, то поступают следующим образом. Определим вектор $f^1 = f - Ax^1$. Очевидно, что погрешность $r^1 = x - x^1$ удовлетворяет системе уравнений

$$Ar^1 = Ax - Ax^1 = f^1. \quad (8)$$

Решим систему $Ar^1 = f^1$ в условиях реальных округлений, получаем приближение $r^{(1)}$ к r^1 и следовательно $x^2 = x^1 + r^{(1)}$. Если точность нового приближения не удовлетворительная, то повторяют эту операцию. Поскольку погрешности округлений обычно малы, то $\|f^1\| \ll \|f\|$, тогда $\|r^1\| \ll \|x^1\|$ и по-видимому решению системы (6) определяется существенно меньший абсолютной погрешностью, чем решение системы (1).

Таким образом, применение описанного приема приводит к повышенной точности приближенных решений точных методов.

1.2.4 Схема Халецкого

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = f, \quad (9)$$

где $A = [a_{ij}]$ квадратная невырожденная матрица размерности n и

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix},$$

векторы неизвестных и правых частей.

Представим матрицу A в виде произведения двух треугольных матриц

$$B = [b_{ij}] \text{ и } C = [c_{ij}], \quad A = BC, \quad (10)$$

где $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$ - нижняя треугольная матрица, а

$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ - верхняя треугольная матрица с единичной

диагональю.

Для определения коэффициентов матриц B и C достаточно перемножить их в буквенном виде, а результат произведения поэлементно сравнивать с элементами матрицы A . Тогда элементы b_{ij} и c_{ij} определяется по формулам:

$$\begin{cases} b_{i1} = a_{i1} \\ b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} \end{cases} \quad i \geq j \geq 1 \quad (11)$$

и

$$\begin{cases} c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{i1}} \\ c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}}(a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj}) \end{cases} \quad 1 < i < j \quad (12)$$

Отсюда искомый вектор x можно вычислить из матричных уравнений

$$By = f \text{ и } Cx = y. \quad (13)$$

Так как $Ax = B \underbrace{Cx}_y = f$.

То есть сначала надо определить значение вспомогательного вектора y :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{a_{1,n+1}}{b_{11}} \\ y_i = \frac{1}{b_{ii}}(a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k), \quad i > 1 \end{cases} \quad (14)$$

Затем находим x_i как и в методе Гаусса обратным ходом:

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik}x_k, \quad i < n \end{cases} \quad (15)$$

Этот метод получил название схемы Халецкого. Очевидно, что в схеме Халецкого компоненты вектора y_i удобно вычислять вместе с коэффициентами c_{ij} .

Схема Халецкого отличается от компактной схемы Гаусса лишь тем, что в схеме Гаусса в матрице B на главной диагонали ставятся 1, а в матрице C элементы c_{ij} . Отметим, что если матрица A симметрична (то есть $a_{ij} = a_{ji}$), то

коэффициент c_{ij} определяется как: $c_{ij} = \frac{b_{ij}}{b_{ii}}, \quad i < j$.

1.2.5 Метод прогонки

Пусть дана система

$$Ax = f \quad (16)$$

с трёхдиагональной матрицей A

$$A = \begin{bmatrix} B_0 & C_0 & \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ & A_n & B_n \end{bmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (16) можно представить в виде:

$$\begin{cases} B_0 x_0 + C_0 x_1 = f_0 \\ A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = f_i \quad (i = \overline{1, n-1}). \\ A_n x_{n-1} + B_n x_n = f_n \end{cases} \quad (17)$$

Значение вектора x_i определяется из рекуррентных соотношений

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad (18)$$

тогда

$$x_{i-1} = \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1}, \quad (19)$$

здесь α_i и B_i - прогоночные коэффициенты.

Подставим (18) и (19) в среднее уравнение (17) и выполним преобразование:

$$(A_i \alpha_{i-1} \alpha_i + B_i \alpha_i + C_i) x_{i+1} + A_i \alpha_{i-1} \beta_i + A_i B_{i-1} + B_i \beta_i = f_i, (i = \overline{0, n}).$$

Для того чтобы это равенство превратилось в тождество для любого ненулевого вектора x_{i+1} достаточно выражение в скобках приравнять к нулю.

$$\alpha_i = \frac{C_i}{(B_i + A_i \alpha_{i-1})}, \quad (20)$$

$$\beta_i = -\frac{A_i \beta_{i-1} - f_i}{(B_i + A_i \alpha_{i-1})}. \quad (21)$$

Из условия сверху системы (2) мы можем получить:

$$A_0 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{C_0}{B_0}, \quad \beta_0 = \frac{f_0}{B_0}.$$

Выполняя **прямую** прогонку, определим все α_i и β_i , учитывая, что $C_n = 0$ получаем $\alpha_n = 0$ и, следовательно, из (18), что $x_n = \beta_n$.

Обратной прогонкой по формуле (19), при $i = n, n-1, \dots, 1$, определим последовательность $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$.

Метод прогонки хорошо обусловлен, если выполняется условие, что

$$|A_i| \geq |C_i|, |B_i| \geq |A_i| + |C_i|. \quad (22)$$

В этом случае метод монотонной прогонки, рассмотренный нами, всегда даст единственное решение, так как в этом случае $|\alpha_i| < 1$ для $i = \overline{0, n}$ и, следовательно, погрешность прогоночных коэффициентов не будет возрастать при прямом ходе и очевидно, что при обратном ходе погрешность округления будет расти меньше. Если условие (22) не выполняется, то следует использовать не-

монотонную прогонку, которая является методом Гаусса с выбором главных элементов для трёхдиагональных матриц.

1.3 Вычисление обратных матриц и определителей

По определению обратная матрица A^{-1} к матрице A будет, если исходную матрицу умножить слева или справа на обратную, получим единичную матрицу, т.е. $A^{-1}A = AA^{-1} = E$. Для получения обратной матрицы по схемам Гаусса следует решать систему уравнений с n правыми частями, правая часть которой является единичной матрицей, или n раз решить эту систему, правой частью, которая является столбцами единичной матрицы.

Следовательно, если $A = [a_{ij}]$, $A^{-1} = [x_{ij}]$, то решаем систему $AA^{-1} = E$ или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате решения этой системы получим столбцы матрицы A^{-1} , элементы которой x_{ij} будут элементами обратной матрицы.

Вычислить определители можно, используя известные прямые методы. В методе Гаусса, после выполнения прямого хода определитель равен произведению диагональных элементов $a_{11}, a_{ii}^{(k)}$ преобразованной матрицы A по схеме Гаусса:

$$\det A = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)}.$$

По схеме Халецкого, т.к. $A = BC$, то $\det A = \det B * \det C$, $\det B = b_{11} b_{22} \dots b_{nn}$, $\det C = 1$, $\det A = b_{11} b_{22} \dots b_{nn}$ - произведение диагональных элементов матрицы B .

В методе квадратного корня определитель равен квадрату диагональных элементов матрицы S , а $\det D$ даёт значение + или - 1. Для положительно определенной матрицы $\det D = 1$ и $A = S * DS$, $A = S * DS$,

$$\det A = \det S * \det D \det S = S_{11}^2 S_{22}^2 \dots S_{nn}^2 \det D.$$

Всё сказанное следует из того, что определитель треугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов. Если $A = BC$, то $A^{-1} = C^{-1}B^{-1}$, так как в этом случае получим: $A^{-1}A = C^{-1} \underbrace{B^{-1}BC}_E = E$.

$$\underbrace{\hspace{10em}}_E$$

Лекция №2

2 Итерационные методы решения СЛАУ

Итерационные методы дают возможность найти решение системы как предел бесконечного вычислительного процесса, позволяющего по уже найденным приближениям к решению построить следующее приближение. Так как приближенное решение является вектором или матрицей, то итерационный процесс следует рассматривать как предел последовательности векторов.

Пусть в n -мерном векторном пространстве дана последовательность векторов: $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ ($k = 1, 2, \dots$).

Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется пределом этой последовательности, если существует каждый из n указанных пределов:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i, \quad (i = 1, n), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Аналогично, если дана последовательность квадратичных матриц $A_k = [a_{ij}^k]$, ($k = 1, 2, \dots$), то матрицу $A = [a_{ij}]$ – называют пределом этой последовательности, если существует n^2 пределов $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^k = a_{ij}$ ($i, j = \overline{1, n}$) ($k = 1, 2, \dots$).

Говорят, что последовательность векторов x^k сходится к вектору x по норме, если норма $\|x - x_k\| \rightarrow 0$.

Особенностью итерационных методов является их самоисправляемость и простота реализации на ЭВМ. Если в точном методе ошибка в вычислении ведет к ошибке в результате, то, в случае сходящегося итерационного процесса, ошибка в каком-то приближении исправляется в последующих вычислениях. Для такого исправления требуется, как правило, только выполнение нескольких единообразных шагов в вычислении.

Сказанное относительно точных методов справедливо, если вычислительная ошибка ничем не компенсируется. Чтобы начать итерационный процесс надо знать одно или несколько начальных приближений к решению.

Условие сходимости и скорость сходимости каждого итерационного метода (процесса) существенно зависит от свойств системы уравнений, т.е. от свойств матрицы системы и от выбора начальных приближений.

2.1 Метод простой итерации

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений: $Ax = f$ с неособенной матрицей A .

В методе простой итерации необходимо исходную систему предварительно привести к каноническому виду

$$x = Bx + b. \quad (1)$$

Представим матрицу A в виде: $A = C + D$. Тогда $(C + D)x = f$ или $x = -C^{-1}Dx + C^{-1}f$, где $B = -C^{-1}D$, $b = C^{-1}f$, $\det C \neq 0$.

Для матрицы A с диагональным преобладанием в качестве матрицы C следует взять матрицу из диагональных элементов $[a_{ii}]$, т.е. $C = [a_{ii}]$. В этом случае, очевидно, что $\|B\| < 1$.

Пусть известно начальное приближение: $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ к точному решению $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Все следующие приближения определим следующим образом:

$$x^{k+1} = Bx^k + b, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Если последовательность приближений сходится к некоторому предельному вектору x^* , то он будет решением системы. Действительно, если в равенстве (2) перейти к пределу, где $k \rightarrow \infty$, что $x^k \rightarrow x^*$, то в пределе получим $x^* = Bx^* + b$.

2.2 Условие сходимости метода простой итерации

Для выяснения условия сходимости последовательности (x^k) докажем ряд теорем.

Теорема 1:

Для того, что бы последовательность приближений x^k сходилась, достаточно чтобы все собственные значения матрицы B , были по модулю меньше единицы,

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Доказательство: Найдем выражение любого приближения x^k через x^0 :

$$\begin{aligned} x^k &= Bx^{k-1} + b = B[Bx^{k-2} + b] + b = B^2x^{k-2} + (E + B)b = \\ &\dots = B^k x^0 + (E + B + B^2 + \dots + B^{k-1})b \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда и из (3) из определения теоремы, что $|\lambda_i| < 1 \quad (i = \overline{1, n})$ справедливо равенство: $E + A + A^2 + \dots + A^m = (E - A)^{-1}$.

Сразу следует, что при $k \rightarrow \infty$, $B^k \rightarrow 0$ и $(E + B + B^2 + \dots + B^{k-1}) \rightarrow (E - B^{-1})$ откуда $x^k \rightarrow (E - B^{-1})b = x$. Ч.т.д.

Теорема 2:

Если требовать, чтобы последовательность x^k сходилась к x , при любом начальном векторе x^0 , то условие (3) является и необходимым.

Доказательство: Пусть для всякого начального приближения x^0 будет $x^k \rightarrow x$. Тогда имеем

$$x - x^k = (Bx - b) - (Bx^{k-1} + b) = B(x - x^{k-1}) = \dots = B^k(x - x^0)$$

При $k \rightarrow \infty$ разность $(x - x^k) \rightarrow 0$, поэтому последний член в цепи этих равенств должен стремиться к нулю, каким бы ни был вектор $(x - x^0)$. Откуда следует, что $B^k \rightarrow 0$. Последнее будет верно тогда, когда верно условие (3).

Ч.т.д.

Применение теорем 1 и 2 возможно при известных собственных значениях матрицы или, по крайней мере, их границ. Определение собственных значений матрицы B часто является не простой задачей и требует большого числа арифметических действий.

Рассмотрим более простые, но **достаточные** признаки сходимости.

Теорема 3:

Для того, чтобы последовательность приближений x^k в методе простой итерации сходилась достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы B была меньше единицы.

Доказательство: Если $\|B\| < 1$, то согласно леммы, что модули собственных значений матрицы не превосходят любой из ее норм, т.е. $|\lambda_i| < \|B\|$ и $\|B\| < 1$. Следовательно, все собственные значения матрицы B меньше единицы и согласно теореме 1, последовательность (x^k) сходится. Ч.т.д.

Непосредственным следствием теоремы 3 и равенств, определяющих норму матриц, является следующая теорема.

Теорема 4:

Последовательность x^k в методе простой итерации сходится, если для матрицы B выполняется одно из неравенств:

$$1) \|B\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}|$$

$$2) \|B\|_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}|$$

$$3) \|B\|_3 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2}$$

Например:

$$\left\| \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \right\| = \max_i \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \\ \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \end{pmatrix} \right\| = \|B\|_1$$

В большинстве случаев важно знать с какой скоростью x^k сходилась к x и оценить погрешность $x - x^k$ замены точного решения системы x приближением x^k .

Теорема 5:

Если какая – либо норма матрицы B ($\|B\|$), согласованная с рассмотренной нормой вектора x , меньше единицы, то верна следующая оценка погрешности приближения в методе простой итерации:

$$\|x - x^k\| \leq \|B\|^k \|x^0\| + \frac{1}{1 - \|B\|} \|B\|^k \|b\|. \quad (5)$$

Доказательство:

Согласно теореме 1, для x^k можно записать $x^k = B^k x^0 + (E + B + B^2 + \dots + B^{k-1})b$. Так как $\|B\| < 1$, то $x = (E + B + B^2 + \dots)b$. Поэтому

$$x - x^k = (B + B^{k-1} + \dots)b - B^k x^0 \quad (6)$$

и норма $\|x - x^k\| \leq (\|B^k\| + \|B^{k+1}\| + \dots)\|b\| + \|B^k\|\|x^0\| = \|B^k\|\|x^0\| + \frac{1}{1 - \|B\|} \|B\|^k \|b\|$.

Часто за x^0 принимают вектор b . В этом случае оценка (5) упрощается. Подставим в (6) $x^0 = b$, следовательно, получим

$$\|x - x^k\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|B\|^{k+1} \|b\| \quad (7)$$

Ч.т.д.

Замечание: Если задана точность $\varepsilon > 0$, то используя оценку (7) $\frac{\|B\|^{k+1}}{1 - \|B\|} \|b\| \leq \varepsilon$,

можно определить необходимое число итерации k для получения требуемой точности. Здесь за x^0 принимается вектор b .

2.3 Метод Зейделя

Пусть дана система алгебраических уравнений $Ax = f$ с неособенной матрицей A .

Рассмотрим сначала случай канонической формы системы для метода простой итерации

$$x = Bx + b. \quad (8)$$

В методе простой итерации следующее приближение $x^{k+1} = (x_1^{k+1} \dots x_n^{k+1})$ находится по предыдущему $x^k = (x_1^k \dots x_n^k)$ подстановкой x^k в правую часть всех уравнений системы (8).

Результат подстановки записывается в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = b_{11}x_1^k + b_{12}x_2^k + b_{13}x_3^k + \dots + b_{1n}x_n^k + \beta_1 \\ x_2^{k+1} = b_{21}x_1^k + b_{22}x_2^k + b_{23}x_3^k + \dots + b_{2n}x_n^k + \beta_2 \\ \dots \\ x_n^{k+1} = b_{n1}x_1^k + b_{n2}x_2^k + \dots + b_{nn}x_n^k + \beta_n \end{cases}. \quad (9)$$

При этом подстановку проводим последовательно, без выбора порядка уравнений. Кроме того не использовали возможность ввода вычислений каждого из полученных исправленных значений неизвестных.

Изменяя, если необходимо, нумерацию уравнений и неизвестных будем считать, что уравнения для подстановки берутся в порядке роста их номеров. Для каждого шага приближения порядок для уравнений подстановки может быть своим, т.е. перестановки уравнений и неизвестные свои. Следовательно, матрица B и свободные члены β_i будут иметь соответствующие изменения. Учитывая этот факт, можем записать итерацию в методе Зейделя в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = b_{11}x_1^k + b_{12}x_2^k + \dots + b_{1n}x_n^k + \beta_1 \\ x_2^{k+1} = b_{21}x_1^{k+1} + b_{22}x_2^k + b_{23}x_3^k + \dots + b_{2n}x_n^k + \beta_2 \\ x_3^{k+1} = b_{31}x_1^{k+1} + b_{23}x_2^{k+1} + b_{33}x_3^k + \dots + b_{3n}x_n^k + \beta_3 \\ \dots \\ x_n^{k+1} = b_{n1}x_1^{k+1} + b_{n2}x_2^{k+1} + b_{n3}x_3^{k+1} + \dots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_{nn}x_n^k + \beta_n \end{cases} \quad (10)$$

После определения вектора x^{k+1} , устанавливаем порядок, подстановок в уравнения значений $x_i^{k+1} (i = \overline{1, n})$ и переходим к вычислению вектора x^{k+2} и т. д.

Порядок выбора уравнения можно построить исходя из принципа максимальной погрешности ε^k . Т.е. в первую очередь получаем ту составляющую решения, которая найдена менее точно, чтобы при нахождении решения других составляющих подставлять ее в улучшенное значение. Порядок выбора уравнений можно построить, используя невязки, полученные при подстановке неизвестных в уравнения и вычитания этих уравнений из правой части, т.е. $(f - Ax) = \delta$ - невязка. Следовательно, нумерацию уравнений системы проводят в порядке убывания невязок.

Обычно используется стационарный метод Зейделя, когда при итерациях порядок уравнений и неизвестных не меняется. В этом случае матрица B остается постоянной на всех шагах, а составляющая всех приближений определяется по значениям x_i^k , в соответствии с записанной системой (10).

Разложим матрицу B на сумму матриц D и C :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}, C = C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (9) можно записать в форме матричного равенства:

$$x^{k+1} = (Dx^{k+1} + Cx^k + b)$$

Откуда следует, что $(E - D)x^{k+1} = Cx^k + b$.

$$\text{Определитель матрицы } (E - D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -b_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n1} & -b_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Значит, эта матрица имеет обратную матрицу. Тогда равенство (10) равносильно

$$x^{k+1} = (E - D)^{-1} C x^k + (E - D)^{-1} b. \quad (11)$$

Следовательно, стационарный метод Зейделя равносильен методу простой итерации, примененному к системе $x = (E - D)^{-1} C x + (E - D)^{-1} b$.

Отсюда для сходимости стационарного процесса Зейделя (9) при любом векторе x^0 начального приближения необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $(E - D)^{-1} C$ были по модулю меньше единицы. Т.е. корни уравнения $|(E - D)^{-1} C - \lambda E| = 0$ должны быть меньше единицы. Если учесть, что $|(E - D)^{-1}| = |E - D|^{-1} = 1$, то можно написать систему равенств:

$$|(E - D)^{-1} C - \lambda E| = |(E - D)^{-1} [C - \lambda(E - D)]| = |(E - D)^{-1} [C + \lambda D - \lambda E]| = |C + \lambda D - \lambda E|.$$

Тогда верна теорема.

Теорема 1:

Для того, чтобы стационарный метод Зейделя сходился при любом начальном векторе приближения x^0 необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

$$|C + \lambda D - \lambda E| = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{21} & \dots & b_{1n} \\ b_{21}\lambda & b_{22} - \lambda & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}\lambda & b_{n2}\lambda & \dots & b_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

были по модулю меньше единицы.

Лемма 1:

Если в матрице $A = [a_{ij}]$, $(i, j = \overline{1, n})$, диагональные элементы a_{ii} $(i = \overline{1, n})$ доминируют по строкам или столбцам, т.е. если

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{или} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad (j = \overline{1, n}),$$

то определитель матрицы A отличен от 0 ($\det A \neq 0$).

Теорема 2:

Для сходимости стационарного метода Зейделя (11) достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий

$$\|B\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1 \quad (13)$$

$$\|B\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1. \quad (14)$$

Для доказательства достаточно показать, что при выполнении условий (13), (14) все корни уравнения (12) по модулю будут меньше единицы.

2.4 Каноническая форма итерационного процесса

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = f. \quad (15)$$

Для ее решения выбирают начальное приближение x_0 и последовательно находят приближенное решение уравнения (15). Значение итерации x_{k+1} выражается через известные предыдущие итерации x_k, x_{k-1}, \dots , если при вычислении x_{k+1} используется только одна предыдущая итерация x_k , то итерационный метод называется одношаговым или двухслойным методом. Если же x_{k+1} выражается через две итерации x_k и x_{k-1} , то метод называется двушаговым (или трехслойным).

Будем считать, что A - линейный оператор в конечном пространстве H со скалярным произведением. Любой двухслойный итерационный метод можно записать в следующей канонической форме:

$$B \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Ax_k = f \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

для всех $x_0 \in H$, где A - оператор уравнения (15), B - линейный оператор, имеющий обратный оператор B^{-1} , k - номер итерации, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k+1}$ - итерационные параметры, $\tau_{k+1} > 0$. Оператор B может зависеть от номера k . Будем предполагать, что B не зависит от k . Если $B = E$ - единичный оператор, то метод

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Ax_k = f, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

для всех $x_0 \in H$ называется **явным**: x_{k+1} находится по явной формуле $x_{k+1} = x_k - \tau_{k+1}(Ax_k - f)$. В общем случае, при $B \neq E$ - метод (16) называется **неявным** итерационным методом. Для определения x_{k+1} надо решить уравнение

$$Bx_{k+1} = Bx_k - \tau_{k+1}(Ax_k - f) = F_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Очевидно, необходимо требовать, чтобы объем вычислений для нахождения решения $Bx_{k+1} = F_k$ был меньше, чем объем вычислений для прямого решения системы (15).

Точность итерационного метода (16) характеризуется величиной погрешности $z_k = x_k - x$, то есть разностью между решением уравнения (16) и точным решением x исходной системы линейных алгебраических уравнений (15). Подставим $x_k = z_k + x$ в (16), придем к однородному уравнению для погрешности:

$$B \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad z_0 = x_0 - x \in H. \quad (19)$$

Говорят, что итерационный процесс (метод) сходится в H_D , если $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Z_k\|_D = 0$, где $\|Z\|_D = \sqrt{(DZ, Z)} : D = D^* > 0$, D – положительно определенный оператор $D: H \rightarrow H$.

Обычно задается некоторая относительная погрешность $\varepsilon > 0$, с которой надо найти приближенное решение x_k и прекращают вычисления как только выполнится условие:

$$\|x_k - x_{k-1}\|_D \leq \varepsilon \|x_0 - x\|_D. \quad (20)$$

Если $n = n(\varepsilon)$ – наименьшее из чисел для которых (20) выполняется, то общее число арифметических действий, которое затрачивается для нахождения приближенного решения уравнения (15); $Q_n(\varepsilon) = n(\varepsilon)q$, где q – число действий, затраченных для нахождения одной итерации, то есть решения уравнения (18). Задача состоит в минимизации $Q_n(\varepsilon)$ путем выбора оператора B и параметров $\{\tau_{k+1}\}$.

2.5 Метод минимальных невязок

Запишем итерационный метод в канонической форме:

$$B \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Ax_k = f, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

для всех $x_0 \in H$) для системы уравнений $Ax = f$. Будем считать, что оператор $A = A^* > 0$. Рассмотрим уравнение, когда $B = E$. В результате придем к явной схеме

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Ax_k = f \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (21)$$

Назовем величину $r_k = Ax_k - f$ – **невязкой**. Тогда для невязки r_k имеем уравнение

$$\frac{r_{k+1} - r_k}{\tau_{k+1}} + Ar_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad r_0 = Ax_0 - f. \quad (22)$$

Параметр τ_{k+1} будем выбирать из условия минимума невязки r_{k+1} по норме:

$$\begin{aligned} \|r_{k+1}\|^2 &= \|r_k - \tau_{k+1} Ar_k\|^2 = \\ &= \|r_k\|^2 - 2\tau_{k+1} (Ar_k, r_k) + \tau_{k+1}^2 \|Ar_k\|^2 = \varphi(\tau_{k+1}) \end{aligned}$$

Продифференцируем это выражение по (τ_{k+1}) и приравняем к нулю $\varphi'(\tau_{k+1})$

$$\varphi'(\tau_{k+1}) = -2\tau_{k+1} (r_k, Ar_k) + 2\tau_{k+1} \|Ar_k\|^2 = 0 \text{ и найдем}$$

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar_k, r_k)}{\|Ar_k\|^2}, k = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

где $\|Ar_k\|^2 = (Ar_k, Ar_k)$, $k = 1, 2, \dots$

При этом значении τ_{k+1} вторая производная $\varphi''(\tau_{k+1}) > 0$ и, следовательно, достигается минимум $r_{k+1} = \min_{\tau_{k+1}} \|r_{k+1}\|^2$.

Если $A : A = A^* > 0$ самосопряженный оператор, то верны априорные оценки: $\|r_{k+1}\| \leq \rho_0 \|r_k\|$;

$$\|Ax_k - f\| < \rho_0^n \|Ax_0 - f\|, \quad (24)$$

где $\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}$; $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, а $\gamma_1 \in \gamma_2$ - точные границы спектра оператора A , то

есть собственные значения λ_s оператора A , лежат на отрезке $[\gamma_1, \gamma_2]$: $\gamma_1 < \lambda_s < \gamma_2$.

Вычисления проводят до тех пор, пока $\|r_k\|^2 > \varepsilon$. Если $\|r_k\|^2 < \varepsilon$, решением системы будет вектор x_{k+1} , который определяется по формуле: $x_{k+1} = x_k - r_k \tau_{k+1}$, где $\|r_k\|^2 = (Ar_k, r_k)$.

2.6 Метод скорейшего спуска

Этот метод отличается от метода минимальных невязок только формулой для определения τ_{k+1}

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}, r_k = Ax_k - f, k = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Эта формула может быть получена из условия минимума нормы $\|z_{k+1}\|_A$ погрешности $z_{k+1} = x_{k+1} - x$ или из условия ортогональности невязок r_k и r_{k+1} . Умножая скалярно уравнение $r_{k+1} = r_k - \tau_{k+1} Ar_k$ на r_k , получим, $(r_k, r_k) - \tau_{k+1} (Ar_k, r_k) = 0$ откуда следует формула (25).

Для z_{k+1} справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \|z_{k+1}\|_A^2 &= \|(E - \tau_{k+1}A)z_k\|_A^2 \leq \|(E - \tau_0A)z_k\|_A^2 \\ &\leq \|E - \tau_0A\|_A^2 \|z_k\|_A^2 \leq \|z_{k+1}\|_A^2 = \|x_{k+1} - x\|_A^2 \\ &\leq \rho_0^n \|x_0 - x\|_A^2 \end{aligned}$$

Метод скорейшего спуска сходится в пространстве H_A с той же скоростью, что и метод простой итерации.

Эти **релаксационные** методы основаны на принципе уменьшения функции ошибки.

Лекция 3

3 Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы

3.1 Характеристический многочлен матрицы

Пусть $A = [a_{ij}]$ ($i, j = \overline{1, n}$) квадратичная матрица n -го порядка с действительными коэффициентами и λ_i некоторые неизвестные числа. Тогда матрица $(A - \lambda E)$, где E – единичная матрица n -го порядка называется характеристической матрицей матрицы A .

Характеристическую матрицу можно представить в виде:

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

Определитель этой матрицы называется характеристическим определителем

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) \quad (2)$$

В развёрнутом виде $\det(A - \lambda E)$ есть многочлен n -ой степени относительно λ и имеет вид:

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n [\lambda^n - P_1 \lambda^{n-1} + P_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n P_n] \quad (3)$$

Многочлен (3) называется **характеристическим многочленом** матрицы A , а его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются **собственными числами** или **собственными значениями** матрицы A .

Собственные числа могут быть как действительными, так и комплексно-сопряжёнными.

Число P_i называется коэффициентами характерного многочлена. Ненулевой вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ называется собственным вектором матрицы A , эта матрица переводит вектор x в вектор

$$Ax = \lambda x. \quad (4)$$

Каждому собственному значению λ_i соответствует свой собственный вектор $X^{(i)}$, ($i = \overline{1, n}$). Для определения координат собственного вектора составляется характеристическое уравнение

$$Ax - \lambda x = 0 \text{ или } (A - \lambda E)x = 0. \quad (5)$$

В координатном виде оно записывается:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5')$$

Так как собственный вектор ненулевой, то очевидно, что определитель $\det(A - \lambda E) = 0$ и из этого условия определяется собственное значение матрицы A . Следовательно, система (5) или (5') имеют бесчисленное множество решений и его можно решить с точностью до постоянного множителя. Решив эту систему для заданного λ_i , найдём координаты собственного вектора $X^{(i)}, (i = \overline{1, n})$.

Подставляя в систему n собственных значений, получим n собственных векторов, то есть каждому собственному значению отвечает свой собственный вектор.

Собственные вектора можно пронормировать, то есть вынести постоянный множитель. При определении собственных значений и векторов решается две задачи:

- 1) определение всех собственных значений и принадлежащих им собственных векторов с помощью **прямых методов** Крылова и Данилевского и итерационных методов.
- 2) Определение одного или нескольких собственных значений и принадлежащих им собственных векторов. Эта задача решается с помощью **итерационных методов**.

Первая задача состоит в разворачивании характерного многочлена, однако для матрицы выше четвёртого порядка она затруднительна, поэтому используются методами Крылова и Данилевского.

3.2 Метод Крылова

Этот метод основан на свойстве невырожденной квадратичной матрицы обращать свой характеристический многочлен в нуль. Согласно тождеству Гамильтона-Кели всякая квадратичная матрица является корнем своего характеристического многочлена и, следовательно, обращает его в нуль.

Пусть

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^n + P_1 \lambda^{n-1} + P_2 \lambda^{n-2} + \dots + P_n \quad (6)$$

– характеристический многочлен матрицы A .

Заменяем в равенстве (1) величину λ на $A = [a_{ij}]$ получим:

$$A^n + P_1 A^{n-1} + P_2 A^{n-2} + \dots + E P_n = 0 \quad (7)$$

Возьмём произвольный нулевой вектор $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ (8)

и умножив обе части равенства (7) справа на $y^{(0)}$, получим:

$$A^n y^{(0)} + P_1 A^{n-1} y^{(0)} + P_2 A^{n-2} y^{(0)} + \dots + P_n y^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Так как

$$\begin{aligned}
y^{(1)} &= Ay^{(0)} \\
y^{(2)} &= Ay^{(1)} = A^2 y^{(0)} \\
&\dots \\
y^{(n)} &= A^n y^{(0)}
\end{aligned}$$

Тогда равенство (9) примет вид:

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_n y^{(0)} = 0$$

или в развёрнутом виде придём к системе алгебраических выражений:

$$\begin{cases}
P_1 y_1^{(n-1)} + P_2 y_1^{(n-2)} \dots + P_n y_1^{(0)} = -y_1^{(n)} \\
P_1 y_2^{(n-1)} + P_2 y_2^{(n-2)} \dots + P_n y_2^{(0)} = -y_2^{(n)} \\
\dots \\
P_1 y_n^{(n-1)} + P_2 y_n^{(n-2)} \dots + P_n y_n^{(0)} = -y_n^{(n)}
\end{cases} \quad (10)$$

Координаты начального вектора $y^{(0)}$ берутся произвольно, если линейная система (10) имеет единственное решение, то её корни P_1, P_2, \dots, P_n являются коэффициентами характеристического многочлена (6). Решение системы (10) может быть получено с помощью метода Гаусса.

Замечание: Если система уравнений (5) не имеет решений или их бесконечно много, то следует взять другой начальный вектор $y^{(0)}$ и заново прийти к системе (10).

Получить решение характеристического многочлена можно используя методы решения нелинейных уравнений, сначала отделить корни определителя (6) ($\lambda^n + P_1 \lambda^{n-1} + P_2 \lambda^{n-2} + \dots + P_n = 0$), а затем уточнить их с помощью метода хорд или касательных.

3.3 Вычисление собственных векторов по методу Крылова

Если известны коэффициенты P_1, P_2, \dots, P_n характеристического многочлена и собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то метод Крылова даёт возможность найти собственные векторы по следующей формуле:

$$X^{(i)} = y^{(n-1)} + q_{1i} y^{(n-2)} + \dots + q_{n-1i} y^{(0)} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (11)$$

Здесь $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(0)}$ векторы, которые использовались при нахождении коэффициентов P_i методом Крылова, а $q_{ji}, (j = \overline{1, n-1}, i = \overline{1, n})$ определяется по схеме Горнера $q_{01} = 1, q_{ji} = \lambda_i q_{j-1i} + P_j$.

Необходимо помнить, что соответствующие собственные вектора $X^{(i)}$ определяются по формуле (11) с точностью до произвольной постоянной.

3.4 Метод Данилевского

В нём используется основное свойство подобных матриц. Две матрицы A и B называются подобными, если одна получается из другой путём следующего преобразования подобия $B = M^{-1}AM$, где M – некоторая не особая матрица.

Известно, что подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены. Заданную матрицу A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

необходимо привести к матрице Фробениуса:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

с помощью преобразования подобия и затем составить определить

$$\det(F - \lambda E) = \begin{vmatrix} f_{11} - \lambda & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1n} \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложив его по элементам первой строки, получим характеристический многочлен матрицы Фробениуса.

$$D(\lambda) = \det(F - \lambda E) = (-1)^n (\lambda^n - P_1 \lambda^{n-1} - P_2 \lambda^{n-2} - \dots - P_n) \quad (12)$$

$P_1 = f_{11}, P_2 = f_{12}, \dots, P_n = f_{1n}$ - коэффициенты характеристического многочлена матрицы Фробениуса.

В силу подобия матриц характеристический многочлен (12) будет являться характеристическим многочленом матрицы A .

По методу Данилевского переход матрицы A к подобной ей матрице Фробениуса осуществляется с помощью $(n-1)$ преобразования подобия. Последовательно преобразовываются строки матрицы A в строки матрицы Фробениуса, начиная с последней строки.

Матрица M_{n-1} формируется из единичной матрицы после таких же преобразований, что и над матрицей A .

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ m_{n-11} & m_{n-12} & \dots & m_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

где

$$m_{n-1,i} = -\frac{a_{n,i}}{a_{n,n-1}}; m_{n-1,n-1} = \frac{1}{a_{n,n-1}} \quad (13)$$

M_{n-1}^{-1} получается из единичной, если на $n-1$ -ой строке записать коэффициенты n -ой строки матрицы A .

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Строим матрицу $B = AM_{n-1}$, а затем $C = M_{n-1}^{-1}B$ в результате получим матрицу C подобную матрице A с одной приведённой строкой к матрице Фробениуса, следовательно $C = M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}$.

Потом построим $D = CM_{n-2}$ и $E = M_{n-2}^{-1}D$

В результате $n-1$ -го преобразования придём к матрице Фробениуса

$$F = M_1^{-1}M_2^{-1}\dots M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}M_{n-2}\dots M_1$$

$$E = M_{n-2}^{-1}M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}M_{n-2}$$

Если в некоторой матрице преобразование подобия элемент $e_{n-2,n-2} = 0$, то нужно поменять местами строки.

3.5 Вычисление собственных векторов по методу Данилевского

Пусть $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - собственный вектор матрицы Фробениуса соответствующий значению λ . Тогда $Fy = \lambda y$. Откуда

$$(F - \lambda E)y = 0 \quad (14)$$

и, следовательно, произведя умножение, получим систему уравнений для нахождения координат y_1, y_2, \dots, y_n собственного вектора матрицы Фробениуса:

$$\begin{cases} (f_{11} - \lambda)y_1 + f_{12}y_2 + \dots + f_{1n}y_n = 0 \\ y_1 - \lambda y_2 = 0 \\ \dots \\ y_{n-1} - \lambda y_n = 0 \end{cases}$$

С точностью до коэффициента пропорциональности её решение можно найти, задав произвольно y_n (например $y_n = 1$).

$$y_{n-1} = \lambda \quad y_{n-2} = \lambda y_{n-1} = \lambda^2$$

$$y_1 = \lambda^{n-1} \quad y = (\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \dots, 1) \quad (15)$$

Так как матрица F подобна матрице A , то λ является собственным значением матрицы A . Обозначим $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ собственный вектор матрицы A соответствующим собственному значению λ , следовательно,

$$X = M_{n-1}M_{n-2}\dots M_1 y, \quad (16)$$

где M_i матрицы преобразования по методу Данилевского.

Лекция 4

4 Итерационные методы решения полной проблемы собственных значений

4.1 Введение

Всякая симметричная действительная матрица A может быть приведена подобными преобразованиями к диагональному виду

$$A = U \lambda U^{-1}, \quad (1)$$

где U – ортогональная, λ – диагональная, элементами которой являются собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A . Так как для ортогональных матриц обратная совпадает с транспонированной ($U = U^{-1}$), равенство (1) равносильно следующему:

$$U A U^{-1} = \lambda \quad (2)$$

Это равенство даёт возможность построить бесконечно много алгоритмов для приближённого вычисления матрицы λ , отличающихся между собой способами построения матрицы U . В основании методов лежит факт: пусть каким-либо ортогональным преобразованием с матрицей \tilde{U} мы привели матрицу A к некоторой матрице $\tilde{\lambda}$, мало отличающейся от диагональной, и получили равенство:

$$U' A U = \lambda \quad (3)$$

$$\tilde{\lambda} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \tilde{\lambda}_2 & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

Собственные значения матриц A и $\tilde{\lambda}$ совпадают между собой. Если бы оказалось, что все недиагональные элементы λ_{ij} ($i \neq j$) в $\tilde{\lambda}$ равны 0, то равенства (2) и (3) совпали бы и собственные значения матрицы A были бы равны диагональным элементам $\tilde{\lambda}_i$ в $\tilde{\lambda}$.

Если же недиагональные элементы λ_{ij} ($i \neq j$) не все равны 0, но все будут иметь малые значения, то следует ожидать, что собственные значения матрицы A будут близкими к λ_i ($i = \overline{1, n}$) и $\tilde{\lambda}_i$ могут быть приняты за приближённые величины этих значений.

Для использования равенства (2) нужно построить последовательность ортогональных преобразований, позволяющих неограниченно уменьшать модули недиагональных элементов матрицы A .

Меру близости A к диагональному методу целесообразно определять следующим образом: введём сумму квадратов модулей недиагональных элементов по строкам и запишем:

$$\sigma_i(A) = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad i \neq j \quad (5)$$

и за нужную нам величину примем число:

$$t(A) = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|^2 \quad (6)$$

Пусть с помощью преобразования подобия с ортогональными матрицами построена последовательность матриц $A^0 = A, A^1, \dots, A^k$. Процесс построения называется *монотонным*, если $t(A^k) < t(A^{k-1})$. Таких процессов может быть построено большое число.

4.2 Метод вращений Якоби

По заданной матрице A будем строить последовательность матриц (A^k) . Таковую, что каждая следующая матрица A^{k+1} получается из предыдущей матрицы A^k при помощи преобразования подобия со следующей ортогональной матрицей вращения:

$$U_{ij}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & 0 \\ & & \cos \varphi & -\sin \varphi & \\ & & \sin \varphi & \cos \varphi & \\ & 0 & & & 1 \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ j \\ \\ (7) \end{matrix}$$

где индексы $i \neq j$ определены из условия $a_{ij}^k = \max_{i < j} a_{ij}^k$

Предположим, преобразование доведено до шага k и построена матрица $A^k = [a_{ij}^k]$. Найдём в ней наибольший по модулю недиагональный элемент. Пусть это a_{ij}^k . В виду симметричности A^k , можно считать $i < j$. Если таких элементов несколько, можно взять любой из них. По индексам $i \neq j$ строим матрицу вращения $U_{ij}^k = U_{ij}^k(\varphi^k)$, в которой угол φ^k определим ниже.

Образуем после этого матрицу $A^{k+1} = U_{ij}^{k'} A^k U_{ij}^k$ (8).

Для упрощения записи введём обозначение $B^k = A^k U_{ij}^k$, $B^k = [b_{ij}^k]$.

В виду определения матрицы (7) все столбцы B^k , кроме $i \text{ \textasciitilde } j$, будут такими же как и в A^k . Элементы же столбцов номеров $i \text{ \textasciitilde } j$ вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} b_{vi}^k = a_{vi}^k \cos j^k + a_{vj}^k \sin j^k \\ b_{vj}^k = -a_{vi}^k \sin j^k + a_{vj}^k \cos j^k \end{cases}, v = \overline{1, n} \quad (9)$$

Аналогично строки $A^{k+1} = U_{ij}^{k'} B^k$ кроме $i \text{ \textasciitilde } j$ будут такими же, как в B^k , а элементы $i \text{ \textasciitilde } j$ строк вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} a_{iv}^{k+1} = b_{iv}^k \cos \varphi^k + b_{jv}^k \sin \varphi^k \\ a_{jv}^{k+1} = -b_{iv}^k \sin \varphi^k + b_{jv}^k \cos \varphi^k \end{cases}, v = \overline{1, n}$$

Равенства (9) и (10) позволяют легко вычислить a_{ij}^{k+1} :

$$a_{ij}^{k+1} = b_{ij}^k \cos \varphi^k + b_{jj}^k \sin \varphi^k =$$

$$= (-a_{ii}^k \sin \varphi^k + a_{ij}^k \cos \varphi^k) \cos \varphi^k + (-a_{ji}^k \sin \varphi^k + a_{jj}^k \cos \varphi^k) \sin \varphi^k$$

или так как $a_{ij}^k = a_{ji}^k$ (симметрия), то значит:

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k \cos 2\varphi^k + \frac{1}{2}(a_{jj}^k - a_{ii}^k) \sin 2\varphi^k \quad (11)$$

Выберем теперь φ^k таким образом, чтобы a_{ij}^{k+1} обратился в 0. Это требование даёт:

$$\operatorname{tg} 2\varphi^k = \frac{2a_{ij}^k}{a_{ii}^k - a_{jj}^k} = p^k$$

Откуда следует, что $\varphi^k = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} p^k$ (12).

Что касается значения меры $t(A^k)$ близости A^k к диагональной форме, то пользуясь симметричностью A и соотношениями (9)-(11), можно показать, что $t(A^{k+1}) = t(A^k) - 2(a_{ij}^k)^2$ (13).

Т.к. a_{ij}^k есть наибольший недиагональный элемент и он предполагается отличным от 0 (если $a_{ij}^k = 0$, то A^k были бы собственным значениям матрицы A и переход к A^{k+1} не нужен), верно неравенство $t(A^{k+1}) \leq t(A^k)$

и $t(A^k)$ уменьшается при переходе к A^{k+1} .

По выбору a_{ij}^k можно оценить скорость сходимости и скорость стремления $t(A^k)$ к нулю, если воспользоваться неравенством:

$$t(A^k) \leq n(n-1)(a_{ij}^k)^2$$

и следовательно, $(a_{ij}^k)^2 \geq \frac{t(A^k)}{n(n-1)}$ (14).

С помощью этого неравенства и из (13) получается:

$$t(A^{k+1}) \leq t(A^k) - \frac{2}{n(n-1)} t(A^k) = q \cdot t(A^k),$$

где $0 \leq q = 1 - \frac{2}{n(n-1)} < 1$ ввиду того, что $n \geq 2$.

Отсюда вытекает цепь неравенств:

$$t(A^k) \leq q t(A^{k-1}) \leq \dots \leq q^k t(A^0)$$

Т.к. $A^0 = 0$, то $t(A^k) \leq q^k t(A)$, следовательно $t(A^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ со скоростью, не меньшей скорости геометрической со знаменателем $q < 1$.

4.3 Итерационные методы определения частичной проблемы собственных значений, собственных векторов матрицы

4.3.1 Нахождение наибольшего по модулю собственного значения матрицы и соответствующего собственного вектора

Пусть имеем характеристическое уравнение $D(y) = \det(A - \lambda E) = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются собственными значениями матрицы A . Пусть им соответствуют линейно независимые собственные вектора x^1, x^2, \dots, x^n . Рассмотрим итерационный метод вычисления наибольшего по модулю собственного значения матрицы A не требующего раскрытия векового определителя.

Пусть среди собственных значений матрицы A есть одно наибольшее по модулю. Для определенности положим

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \quad (7)$$

Так, что наибольшим по модулю является первое собственное значение. Очевидно, что для действительной матрицы наибольшее по модулю собственное значение матрицы A λ_1 будет действительным. Такой случай всегда имеет место, если матрица A действительна и её элементы положительны.

Определим λ_1 . Для этого возьмем произвольный вектор $y = (y_1 \dots y_n)^T$ и разложим его по собственным векторам матрицы A .

$$y = \sum_{j=1}^n c_j x^j, \text{ где } c_j \text{ – постоянные коэффициенты } j = \overline{1, n}.$$

Произведя преобразования A над вектором y , получим:

$$Ay = \sum_{j=1}^n c_j (Ax)^j.$$

Отсюда т.к. x^j собственный вектор преобразования A получим, что $Ax^j = \lambda x^j$

и тогда получим: $Ay = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j x^j$.

Величину Ay называют итерацией над вектором y .

Последовательно образуя итерации $Ay, A^2y, \dots, A^m y$, находим, что:

$$y^m = A^m y = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^m x^j \quad (8)$$

– m – тая итерация.

Пусть $y^m = A^m y$ $m = 1, 2, \dots$ и $y = \begin{bmatrix} y^m_1 \\ y^m_2 \\ \dots \\ y^m_n \end{bmatrix}$, где y^m_i ($i = \overline{1, n}$) координаты y^m в вы-

бранном базисе e_1, e_2, \dots, e_n . Разлагая собственные вектора x^j по векторам базиса, можем записать выражение для составляющих вектора y :

$$y^m_i = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^m x_{ij} \quad (9)$$

m – ая итерация. Аналогично

$$y^{m+1}_i = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^{m+1} x_{ij} \quad (10)$$

Разделив (10) на (9) получим:

$$\frac{y^{m+1}_i}{y^m_i} = \frac{c_1 \lambda_1^{m+1} x_{i1} + c_2 \lambda_2^{m+1} x_{i2} + \dots + c_n \lambda_n^{m+1} x_{in}}{c_1 \lambda_1^m x_{i1} + c_2 \lambda_2^m x_{i2} + \dots + c_n \lambda_n^m x_{in}} \quad (11)$$

Пусть $c_1 \neq 0$ и $x_{i1} \neq 0$, что можно всегда получить, выбирая надлежащим образом, исходный вектор y и базис e_1, e_2, \dots, e_n . Преобразуем выражение (11) к виду:

$$\frac{y^{m+1}_i}{y^m_i} = \lambda_1 \cdot \frac{1 + \frac{c_2 x_{i2}}{c_1 x_{i1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{m+1} + \dots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{m+1}}{1 + \frac{c_2 x_{i2}}{c_1 x_{i1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^m + \dots + \frac{c_n x_{in}}{c_1 x_{i1}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^m}.$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, и учитывая неравенство (7) получим:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y^{m+1}_i}{y^m_i} = \lambda_1 \quad (12)$$

Можем записать:

$$\lambda_1 \approx \frac{y^{m+1}_i}{y^m_i}, \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (13)$$

а точнее

$$\lambda_1 = \frac{y^{m+1}_i}{y^m_i} + o\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m\right) \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Для достаточно большого номера итерации m можем с любой степенью точности с помощью формулы (13) определить наибольшее по модулю корень

λ_1 характеристического многочлена матрицы A . Для получения более точного значения корня λ_1 следует взять среднее арифметическое из суммы отношений координат вектора y .

$$\frac{y_1^{m+1}}{y_1^m} \approx \frac{y_2^{m+1}}{y_2^m} \approx \dots \approx \frac{y_n^{m+1}}{y_n^m}, \text{ следовательно, считают } \lambda_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^{m+1}}{y_i^m}.$$

Собственный вектор матрица A соответствующий λ_1 приближенно можем взять, полагая, что $x^1 = y^m = A^m y$, т.к. $A^m y = c_1 \lambda_1^m x^1$, т.е. $A^m y$ лишь числовым множителем отличается от собственного вектора x^1 и поэтому является собственным вектором соответствующим λ_1 .

Пример:

Найти наибольшее собственное значение матрицы A и собственный вектор:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение.

1. Выберем начальный вектор $y = (1, 1, 1)$.
2. Составим итерации, например, для $m = 10$ $y^1 = Ay^0$; $y^2 = A^2 y = Ay^1$; ...; $y^{10} = A^{10} y$.
3. Для различных координат вектора y следует воспользоваться формулой (13), а результаты итераций сведем в таблицу:

y^0	$y^1 = Ay^0$...	$A^7 y$	$A^8 y$	$y^9 = A^9 y$	$y^{10} = A^{10} y$
1	4		10260	62973	243569	941378
1	5		14193	54630	210663	812585
1	2		5002	19193	73845	284508

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{11} \approx \frac{y_1^{10}}{y_1^9} = \frac{941378}{243569} \approx 3,865 \\ \lambda_{12} \approx \frac{y_2^{10}}{y_2^9} = \frac{812585}{210663} \approx 3,857 \\ \lambda_{13} \approx \frac{y_3^{10}}{y_3^9} = \frac{284508}{73845} \approx 3,853 \end{array} \right.$$

4. Вычислим λ_1 как среднее арифметическое из $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}$.

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13}}{3} = 3,858$$

5. В качестве 1-го собственного вектора матрицы A можно взять вектор

$$y^{10} = A^{10}y = \begin{bmatrix} 941376 \\ 812585 \\ 284508 \end{bmatrix}. \text{ Нормируя этот вектор, т.е. разделив его на норму вектора}$$

$\|y^{10}\| = \sqrt{941376^2 + 812585^2 + 284508^2} = 1,28 \cdot 10^6$. Получим 1-ый собственный вектор матрицы A , принадлежащий собственному значению $\lambda_1 = 3,858$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0,74 \\ 0,64 \\ 0,22 \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Определение второго собственного значения и второго собственного вектора.

Пусть собственное значение λ_j ($j = \overline{1, n}$) матрицы A таковы, что

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (14)$$

т.е. имеется два различных наибольших по модулю собственных значения λ_1 и λ_2 матрицы A . Итерационным способом найдем второе собственное значение λ_2 , отвечающее собственному вектору x^2 . Так как

$$A^m y = c_1 \lambda_1^m x^1 + c_2 \lambda_2^m x^2 + \dots + c_n \lambda_n^m x^n \quad (15)$$

$$A^{m+1} y = c_1 \lambda_1^{m+1} x^1 + c_2 \lambda_2^{m+1} x^2 + \dots + c_n \lambda_n^{m+1} x^n. \quad (16)$$

Исключим λ_1 . Для этого из равенства (16) вычтем равенство (15), умноженное на λ_1 в результате получим:

$$A^{m+1} y - \lambda_1 A^m y = c_2 \lambda_2^m (\lambda_2 - \lambda_1) x^2 + \dots + c_n \lambda_n^{m+1} (\lambda_n - \lambda_1) x^n. \quad (17)$$

Выражение $\Delta_{\lambda} A^m y = A^{m+1} y - \lambda A^m y$ называется λ - **разностью** от $A^m y$. Если $c_2 \neq 0$, то первое слагаемое в правой части (17) является её главным членом при $m \rightarrow \infty$ и мы имеем приближенное равенство:

$$\Delta_{\lambda_1} A^m y \approx c_2 \lambda_2^m (\lambda_2 - \lambda_1) x^2 \quad (18)$$

отсюда

$$\Delta_{\lambda_1} A^{m-1} y \approx c_2 \lambda_2^{m-1} (\lambda_2 - \lambda_1) x^2. \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует что:

$$\lambda_2 \approx \frac{\Delta_{\lambda_1} y_i^m}{\Delta_{\lambda_1} y_i^{m-1}} = \frac{y_i^{m+1} - \lambda_1 y_i^m}{y_i^m - \lambda_1 y_i^{m-1}} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (20)$$

Пользуясь (20) формулой можно приближенно вычислить второе собственное значение λ_2 .

Отметим, что на практике ввиду потери точности при вычислении близких чисел иногда выгоднее номер итерации k для определения λ_2 брать меньше, чем номер итерации m при нахождении λ_1 , т.е. целесообразно пользоваться формулой:

$$\lambda_i \approx \frac{y_i^{k+1} - \lambda_1 y_i^k}{y_i^k - \lambda_1 y_i^{k-1}} \quad k < m, \quad (21)$$

где k – наименьшее из чисел при котором начинает сказываться преобладание λ_2 над λ_1 .

Формула (21) дает, вообще говоря, грубые значения для λ_2 , оно может отличаться от λ_2 полученного по формуле Крылова или Данилевского. Заметим, что если все собственные значения матрицы A отличны друг от друга, т.е. нет кратных собственных значений то при помощи формул аналогичных (21) можно вычислить все собственные значения матрицы A , принимая m достаточно большим. Для определения 3-го собственного значения следует брать λ -разность второго порядка. Однако точность вычислений последующих значений не будет достигнута. Собственный вектор x^2 соответствующий второму собственному значению λ_2 матрицы A согласно формуле (18) можем определить положив

$$x^2 = \Delta_{\lambda_1} y^k. \quad (22)$$

Пример:

Для матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ найти λ_2 и соответствующий ему собственный вектор x^2 .

Решение.

За номер итерации k примем 8. Из предыдущего примера возьмем $A^m y$ для $m=7,8,9$. Составим λ -разность $\Delta_{\lambda_1} y_i^m = y_i^{m+1} - \lambda_1 y_i^m$ ($i=1,2,3$)

$\Delta_{\lambda_1} A^7 y$	$\lambda_1 A^8 y$	$\Delta_{\lambda_1} A^8 y$
128	243390	179
-92	210785	-122
-77	73958	-113

Для каждой из строк примем своё λ :

$$\lambda_{11} = 3,865$$

$$\lambda_{12} = 3,857.$$

$$\lambda_{13} = 3,853$$

Для каждой итерации по формуле (20) или (21) вычислим:

$$\lambda_{21} \approx \frac{\Delta_\lambda y_1^8}{\Delta_\lambda y_1^7} = \frac{179}{128} = 1,400; \lambda_{22} \approx \frac{\Delta_\lambda y_2^8}{\Delta_\lambda y_2^7} = \frac{-122}{-92} = 1,326; \lambda_{23} \approx \frac{\Delta_\lambda y_3^8}{\Delta_\lambda y_3^7} = \frac{-113}{-77} = 1,468$$

$$\lambda_2 = \frac{1,4 + 1,326 + 1,468}{3} = 1,398.$$

В качестве 2-го собственного вектора (22) принимаем: $x^2 = \Delta_{\lambda_1} A^8 y = \begin{bmatrix} 179 \\ -122 \\ -113 \end{bmatrix}$,

нормируя его, получим: $x^2 = \begin{bmatrix} 0,73 \\ -0,50 \\ -0,46 \end{bmatrix}$.

Для данной матрицы можно найти третье собственное значение, зная след матрицы SpA .

$$SpA = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

так как $SpA = 3 + 2 + 1 = 6$, то $\lambda_3 \approx 6 - 3,858 - 1,398 = 0,744$.

Лекция 5

5 Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений первого порядка и их систем

К наиболее употребительным разностным схемам решения задачи Коши относят схемы Эйлера, Рунге-Кутты, Адамса.

В общем виде дифференциальное уравнение первого порядка запишется так:

$$\begin{aligned} & F(x, y, y') = 0, \\ \text{с начальными условиями} & u(x_0) = u_0, \\ \text{или} & \begin{cases} u' = f(x, y) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на N равных частей точками $x_i = a + ih$ ($i = \overline{0, N}$), то есть построим сетку:

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = a + ih; i = \overline{0, N}; h = \frac{b-a}{N} \right\}.$$

На этой сетке разложим функцию $u(x_i + h)$ в ряд Тейлора:

$$u(x_i + h) = u(x_i) + \frac{h}{1!} u'(x_i) + \frac{h^2}{2!} u''(x_i) + O(h^3).$$

$$\text{Отсюда } u'(x_i) \approx \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h}.$$

Погрешность аппроксимации производной есть величина

$$\psi = \frac{h^2}{2} u''(\xi) = O(h^2).$$

И тогда задача Коши (1) заменится разностной схемой:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = f(x_i, u_i), \\ u(a) = u_0 \end{cases}, \quad (2)$$

здесь $u_i = u(x_i)$; $u_{i+1} = u(x_i + h)$.

Тем самым значение решения $u(x)$ разностной задачи Коши заменяется таблицей $[u]_h$ дискретных значений. В качестве первой схемы рассмотрим схему Эйлера.

5.1 Схема Эйлера

Пусть требуется найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x \in [a, b]. \quad (3)$$

Заменим отрезок $[a, b]$ сеткой $\overline{\omega}_h$, тогда можно выписать разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Такая схема называется **схемой Эйлера**. Она обладает первым порядком аппроксимации и точности. Вычисление значения функции y_{i+1} по этой схеме обычно проводят по формуле:

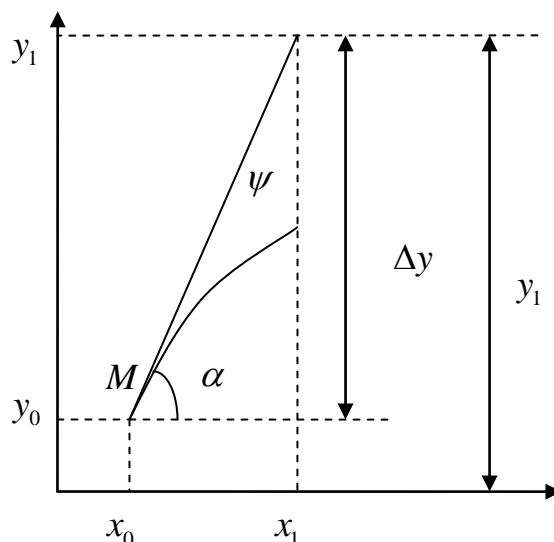
$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (5)$$

или

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (5')$$

где $\Delta y_i = hf(x_i, y_i)$.

С другой стороны, учитывая, что $y' = f(x, y)$, формулам Эйлера можно дать геометрическую интерпретацию:



Значение функции y_1 в точке (x_1, y_1) получается, если в точке (x_0, y_0) провести касательную к кривой $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ до пересечения с прямой $x = x_1$. Очевидно, что для получения решения с меньшей погрешностью в схеме Эйлера следует взять шаг достаточно малый.

5.2 Модификации метода Эйлера

5.2.1 Усовершенствованный метод Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (6)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0. \quad (6')$$

Требуется найти решение уравнения (6) на отрезке $[a, b]$. Разобьем $[a, b]$ на N равных частей точками $x_i = a + ih$ ($i = \overline{0, N}$), то есть построим сетку $\overline{\omega}_h$.

Сущность усовершенствованного метода Эйлера состоит в следующем: сначала вычисляют вспомогательные значения искомой функции $y_{i+1/2}$ в точках

$$x_i + \frac{h}{2} = x_{i+1/2}$$

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} y'_i = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i). \quad (7)$$

Затем находится значение правой части уравнения (6) в средней точке:

$$y'_{1/2} = f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right),$$

и определяют

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right). \quad (8)$$

Замечание: Оценка погрешности в точке x_i может быть получена с помощью принципа Рунге (двойного просчета). Расчет повторяют с шагом $\frac{h}{2}$ и погрешностью более точного решения y_i^* при шаге $\frac{h}{2}$ оценивают следующим образом:

$$\left|y_i^* - y(x)\right| \leq \frac{1}{3} \left|y_i^* - y_i\right|, \quad (9)$$

где $y(x)$ - точное решение дифференциального уравнения.

Усовершенствованный метод Эйлера является более точным по сравнению с методом Эйлера.

Пример 1

Проинтегрировать усовершенствованным методом Эйлера дифференциальное уравнение: $y' = y - x$ с начальными данными $y(0) = 1,5$ на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0,25$.

Решение: Результаты вычислений приведены в таблице.

i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\frac{h}{2} y'_i$	$x_{i+1/2}$	$y_{i+1/2} = y_i + \frac{1}{2} y'_i$	$y'_{i+1/2} = f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)$	$hy'_{i+1/2}$
0	0	1,5	1,5	0,1875	0,125	1,6875	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,2031	0,375	2,0957	1,7207	0,4302
2	0,5	2,3208	1,8208	0,2276				
3	0,75							
4	1							

5.2.2 Усовершенствованный метод Эйлера-Коши

Сущность метода Эйлера-Коши состоит в следующем: сначала определяют вспомогательную величину

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (10)$$

$$\tilde{y}'_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$$

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y'_i + \tilde{y}'_{i+1}}{2} \quad (11)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_i, y_{i+1})}{2}. \quad (11')$$

Оценка погрешности может быть проверена по формуле (9) после повторного просчета с шагом $\frac{h}{2}$.

Пример 2. Пользуясь усовершенствованным методом Эйлера-Коши проинтегрировать задачу из примера 1.

Решение:

Результаты вычислений следует проводить в таблице:

i	x_i	y_i	$y'_i = y_i - x_i$	hy'_i	x_{i+1}	$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$	\tilde{y}_{i+1}	$h\tilde{y}'_{i+1}$	Δy_i
0	0	1,5	1,5	0,375	0,25	1,875	1,625	0,4062	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,4102	0,5	0,3008	1,8008	0,4502	0,4302
2	0,5	2,3208							
3	0,75								
4	1								

1 шаг: по начальным данным заполняем столбцы 2 и 3 первой строки.

2 шаг: определяем значения $y'_i = f(x_i, y_i) = y_i - x_i$ $i = \overline{0,3}$ для столбца 4.

3 шаг: найденные значения y'_i из столбца 4 умножаем на шаг интегрирования h и результат записываем в столбец 5.

4 шаг: определяем $x_{i+1} = x_i + h$ для столбца 6.

5 шаг: к содержимому столбца 3 прибавляем содержимое столбца 5 и результат записываем в столбец 7, то есть определяем $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hy'_i$.

6 шаг: найденные x_{i+1} и y_{i+1} подставляем в правую часть дифференциального уравнения и определяем \tilde{y}'_{i+1} для столбца 8.

7 шаг: результат столбца 8 умножаем на шаг интегрирования h и определяем $h\tilde{y}'_{i+1}$.

8 шаг: находим Δy_i (столбец 10) для чего определяем полусумму величин, записанных в столбцах 5 и 9.

9 шаг: к содержимому столбца 3 прибавляем содержимое столбца 10 и результат записываем в столбец 3 следующей строки.

5.2.3 Усовершенствованный метод Эйлера-Коши с последующей итерационной обработкой

Метод Эйлера-Коши с итерационной обработкой является более точным, чем рассматриваемый метод Эйлера-Коши. Сущность его заключается в том,

что производится итерационная обработка каждого найденного значения y_i . Вначале выражается грубое приближение

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (12)$$

Затем строится итерационный процесс:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{k+1})]. \quad (13)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока два последовательных приближения $y_{i+1}^{(k+1)}$ и $y_{i+1}^{(k)}$ не совпадут в интересующих из условия требуемой точности знаках.

После этого принимается $y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$. Если после трех-четырех итераций при выбранном значении h совпадение нужных знаков не происходит, то следует уменьшить шаг расчета h .

Пример 3

Применяя рассмотренный метод найти с точностью до четырех совпадающих десятичных знаков

$$\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

на отрезке $[0,1]$ с шагом $h = 0,25$.

Решение:

$$y_1^{(0)} = y_0 + h(y_0 - x_0) = 1,500 + 0,375 = 1,8750,$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2} [(y_0 - x_0) + (y_1^{(0)} - x_1)] = 1,5 + 0,125 [1,5 + 1,875 - 0,25] = 1,89062,$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2} [(y_0 - x_0) + (y_1^{(1)} - x_1)] = 1,5 - 1,89062 - 0,25 = 1,89258,$$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{h}{2} [(y_0 - x_0) + (y_1^{(2)} - x_1)] = 1,5 + 0,125 [1,5 + 1,89258 - 0,25] = 1,89282,$$

$$y_1^{(4)} = y_0 + \frac{h}{2} [(y_0 - x_0) + (y_1^{(3)} - x_1)] = 1,89285.$$

В двух последних приближениях совпадают четыре знака, следовательно, при округлении можно принять 1,8928.

Снова воспользуемся формулой (12), при $i = 1$ находим:

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 2,3036.$$

По формулам (13) определяем последовательное приближение:

$$y_2^{(1)} = 2,3237,$$

$$y_2^{(2)} = 2,32622,$$

$$y_2^{(3)} = 2,32654,$$

$$y_2^{(4)} = 2,32658.$$

В двух последних приближениях совпадают четыре знака, следовательно, при округлении можно принять 2,3266 и т.д.

Применяя далее формулы (12) и (13) можем получить решение в точке $x = 1$. Результаты вычисления следует свести в таблицу:

i	x_i	y_i	$y_{i+1}^{(0)}$	$y_{i+1}^{(1)}$	$y_{i+1}^{(2)}$	$y_{i+1}^{(3)}$	$y_{i+1}^{(4)}$	y_{i+1}
0	0	1,5000	1,875	1,89062	1,89258	1,89282	1,89285	1,8928
1	0,25	1,8929	2,3036	2,3237	2,32622	2,32654	2,32658	2,3266
2	0,5	...						
3	0,75	...						
4	1	...						

5.3 Разностные схемы Рунге- Кутта

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется найти численное решение уравнения

$$y' = f(x, y), \quad (14)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$ (15)

Разобьём $[a, b]$ на N равных частей и построим сетку $\overline{\omega}_h$, h -шаг интегрирования. И выберем двухточечный шаблон (x_i, x_{i+1}) . Среди схем более высокого порядка рассмотрим различные варианты схем Рунге- Кутта и Адамса.

5.3.1 Схема Рунге- Кутта

Пусть значение y_i приближённого решения в точке x_i уже найдено и требуется вычислить y_{i+1} в точке x_{i+1} и $x_{i+1} = x_i + h$. Разлагая функцию $y_{i+1} = y(x_i + h)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_i , производную y' приближённо заменим правым конечноразностным отношением: $y' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

1. Выпишем схему Рунге- Кутта:

$$\Delta Y = \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - (P_1 k_1 + P_2 k_2) = 0, & i = \overline{0, N-1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (16)$$

где коэффициенты $k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f(x_i + \alpha h, y_i + \alpha h k_1)$, коэффициенты α, P_1, P_2 подбираются так, чтобы получить аппроксимацию (приближённая замена дифференциальных операторов разностными операторами) более высокого порядка.

Перепишем схему (16) в виде:

$$\Delta Y = \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \left[\frac{2\alpha - 1}{2\alpha} k_1 + \frac{1}{2\alpha} k_2 \right] = 0, & i = \overline{0, N-1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (17)$$

Эта схема имеет **второй** порядок аппроксимации при любом фиксированном параметре α , т.е. погрешность аппроксимации $\psi = O(h^2)$. Для того, чтобы это

показать достаточно функцию y_{i+1} разложить в ряд Тейлора по третьей производной включительно, и подставить в уравнение (17). Отсюда найдём погрешность ψ .

2. Выпишем разностную схему Рунге-Кутты **четвёртого** порядка аппроксимации:

$$\Delta Y = \begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (18)$$

где k является угловыми коэффициентами касательных и интегральной кривой. Они определяются формулами:

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= f(x_i, y_i); & k_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1^{(i)}}{2}\right); \\ k_3^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2^{(i)}}{2}\right); & k_4^{(i)} &= f(x_i + h, y_i + hk_3^{(i)}). \end{aligned}$$

Эта схема имеет четвёртый порядок аппроксимации на всём $[a, b]$.

Оценка точности затруднительна, однако грубо оценить можно по формуле:

$$|y_i^* - y(x_i)| \approx \frac{y_i^* - y_i}{(15)}, \quad (19)$$

где $y(x_i)$ значение точного решения задачи (14)-(15) в точке x_i , а y_i^* и y_i - приближённые значения, полученные при решении различной схемы с шагами $\frac{h}{2}$ и h . Если точность ε задана, то шаг интегрирования можно выбрать из условия:

$$h \leq \sqrt[4]{\varepsilon}. \quad (20)$$

Однако для оценки правильности выбора шага h , или при решении задачи методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага h , можно воспользоваться равенством:

$$q = \left| \frac{k_2^{(i)} - k_3^{(i)}}{k_1^{(i)} - k_2^{(i)}} \right|, \quad (21)$$

где q не должен быть более нескольких сотых.

На практике схему Рунге-Кутты (18) и коэффициенты k_i для удобства вычисления перепишем в следующем виде:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (22)$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (23)$$

а коэффициенты k_i вычисляются следующим образом:

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \\ k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \\ k_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \end{cases} \quad (24)$$

Пример.

Найти решение дифференциального уравнения $y' = y - x$, $y(0) = 1,5$ на отрезке $[0,1]$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

Решение. Отрезок $[a, b] = [0,1]$. Определим шаг $h \leq \sqrt[4]{\varepsilon} = \sqrt[4]{0,01} = 0,3 \Rightarrow h \leq 0,3$.

Выберем $h = 0,25$. $N = \frac{b-a}{h} = \frac{1}{0,25} = 4$.

Решение удобно проводить в таблице:

i	x_i	y_i	$hf(x_i, y_i)$	$\Delta y_i = k_i$	Δy_0
1	2	3	4	5	6
0	0	1,5	0,375	0,3750	1,8920
	0,125		0,3906	0,7812	
	0,125		0,3926	0,7852	
	0,125		0,4106	0,4106	
1	0,25	1,8920	$hf(x_0, y_0)$	k_1	
	$x_0 + \frac{h}{2}$			$2k_2$	
	$x_0 + \frac{h}{2}$			$2k_3$	
	$x_0 + \frac{h}{2}$			k_4	

Из начальных условий $x_0 = 0, y_0 = 1,5, y_1 = y_0 + \Delta y_0$ по (9), для этого вычислим коэффициенты k_i по (24).

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)})$$

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = h(y_0 - x_0) = 0,25(1,5 - 0) = 0,375;$$

$$k_2^{(0)} = h\left(y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2} - x_0 - \frac{h}{2}\right) = 0,25\left(1,5 + \frac{0,375}{2} - 0,125\right) = 0,3906;$$

$$k_3^{(0)} = h\left(y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2} - x_0 - \frac{h}{2}\right) = 0,25\left(1,5 + \frac{0,3906}{2} - 0,125\right) = 0,3925;$$

$$k_4^{(0)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right) = h\left(y_0 + k_3^{(0)} - x_0 - h\right) = 0,25(1,5 + 0,3926 - 0,125) = 0,4106$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = 1,8920$$

5.3.2 Решение системы дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты

Пусть дана система дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y, z), z' = g(x, y, z), \quad (25)$$

с начальными условиями: $x = x_0, y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0.$ (26)

В этом случае используются формулы (22), получаем:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \quad (27)$$

где
$$\begin{cases} \Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \\ \Delta z_i = \frac{1}{6}(l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)}) \end{cases}, \quad (28)$$

где коэффициенты k, l определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i, z_i); \\ l_1^{(i)} &= hg(x_i, y_i, z_i); \\ k_2^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right); \\ l_2^{(i)} &= hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right); \\ k_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right); \\ l_3^{(i)} &= hg\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right); \\ k_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}); \\ l_4^{(i)} &= hg(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}). \end{aligned} \quad (29)$$

И тогда решение в $(i+1)$ точке находится по формуле (27).

Пример: Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$y' = \frac{2y-x}{z}, z' = \frac{2y}{z+x}, \text{ с начальными условиями } x_0 = 0,5, y_0 = 1, z_0 = 1.$$

Требуется найти решение системы в точке $x = 0,6$.

Решение. Выбираем шаг $h = 0,1$, и определим числа $k_j^{(0)}, l_j^{(0)}, j = \overline{1,4}$.

$$k_1 = h \frac{2y_0 - x_0}{z_0} = 0,1 \frac{2 - 0,5}{1} = 0,15; \quad l_1 = h \frac{2y_0}{z_0 + x_0} = 0,1 \frac{2}{1 + 0,5} = 0,1333;$$

$$k_2 = h \left[\frac{2 \left(y_0 + \frac{k_1}{2} \right) - \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)}{z_0 + \frac{l_1}{2}} \right] = 0,141; \quad l_2 = h \left[\frac{2 \left(y_0 + \frac{k_1}{2} \right) x_0}{\left(z_0 + \frac{l_1}{2} \right) + \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)} \right] = 0,133;$$

$$k_3 = h \left[\frac{2 \left(y_0 + \frac{k_2}{2} \right) - \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)}{z_0 + \frac{l_2}{2}} \right] = 0,1492; \quad l_3 = h \left[\frac{2 \left(y_0 + \frac{k_2}{2} \right) x_0}{\left(z_0 + \frac{l_1}{2} \right) + \left(x_0 + \frac{h}{2} \right)} \right] = 0,1326;$$

$$k_4 = h \left[\frac{2(y_0 + k_3) - (x_0 + h)}{z_0 + l_3} \right] = 0,15; \quad l_4 = h \left[\frac{2(y_0 + k_3)}{(z_0 + l_3) + (x_0 + h)} \right] = 0,1326.$$

Следовательно, $\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0,15 + 2 \cdot 0,141 + 2 \cdot 0,1492 + 0,15) = 0,1467$,

$$\Delta z_0 = \frac{1}{6} (l_1^{(0)} + 2l_2^{(0)} + 2l_3^{(0)} + l_4^{(0)}) = 0,1328$$

Легко найти значения по формулам (27):

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1467 = 1,1467;$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0 = 1 + 0,1328 = 1,1328.$$

5.4 Разностные схемы Адамса

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется решить дифференциальное уравнение

$$U' = f(x, y) \quad (30)$$

с начальными условиями $x_0 = a, U(x_0) = U_0$. (31)

Разобьем $[a, b]$ на N частей и введем сетку:

$$\omega_h = \left\{ x_i = a + ih, h = \frac{(b-a)}{N}, i = \overline{1, N-1} \right\}$$

На сетке ω_h выберем двухточечный шаблон и функцию $U(x)$ $x \in [a, b]$ непрерывного изменения аргумента. x заменим в сеточной функции $y_i = y(x_i), i = \overline{0, N+1}$. Полагая, что $y_i \approx U(x_i), x_i \in \overline{\omega}_h$.

Аппроксимируем дифференциальный оператор $L_U = U'$ разностным оператором

$$L_h y = y_x = \frac{-y_i + y_{i+1}}{h}.$$

Обозначим $y'_i = f(x_i, y_i) = f_i$.

Тогда $\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$.

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_i - \Delta f_{i-1} = f_i - f_{i-1} - f_i + f_{i-2} = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}.$$

$$\Delta^3 f_i = \Delta(\Delta^2 f_i) = \Delta f_i - 2\Delta f_{i-1} + \Delta f_{i-2} = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

Выпишем несколько разностных уравнений, используя в схемах Адамса для вычисления y_{i+1} , если $y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}, y_i$ уже известны:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i), \quad y(a) = \varphi_0$$

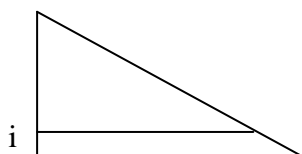
Получим
$$\frac{-y_i + y_{i-1}}{h} - f_i = 0, \quad i = \overline{0, N-1} \quad (32)$$

$$\frac{-y_i + y_{i-1}}{h} - f_i - \frac{1}{2} \Delta f_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (33)$$

$$\frac{-y_i + y_{i-1}}{h} - f_i - \frac{1}{2} \Delta f_i - \frac{5}{12} \Delta f_i^2 = 0, \quad i = \overline{2, N-1} \quad (34)$$

$$\frac{-y_i + y_{i-1}}{h} - f_i - \frac{1}{2} \Delta f_i - \frac{5}{12} \Delta f_i^2 - \frac{3}{8} \Delta^3 f_i = 0, \quad i = \overline{3, N-1}. \quad (35)$$

Для этих схем таблица конечных разностей имеет вид:



Первое из этих уравнение – это разностное уравнение Эйлера. При подстановке в левые части уравнения (32)-(35) вместо $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}$, значений $y((i+1)h), y(ih), y((i-1)h), y((i-2)h), y((i-3)h)$ точного решения $U(x)$, когда $x \in \omega_h$ возникают невязки или погрешности аппроксимации исходной дифференциальной задачи разностной схемой порядка h, h^2, h^3, h^4 , то есть погрешность аппроксимации соответствует $\psi = o(h^m), m > 0$.

Для вычисления по (32) необходимо знать только одно значение $y_0 = \varphi_0$ еще и y_i . Схема (34) требует значения y_0, y_1, y_2 ; а схема (35)- y_0, y_1, y_2, y_3 .

В схемах (32)-(35) точки x_0, x_1, x_2, x_3 называется начальным отрезком схемы Адамса или точками входа в систему Адамса. Значение функций в этих точках может быть получено по другим схемам (Рунге-Кутта, Эйлера с мелким шагом или разложением в степенной ряд в окрестности точки $x = a$). В принципе возможно начальный отрезок схемы Адамса последовательно определять по (32)-(35). Сначала, найдя y_1 по (32), y_2 по (33), y_3 по (34), а продолжение счета производить по (35).

Нестандартное начало счета является одним из недостатков схем Адамса по сравнению со схемой Рунге-Кутта. Преимущество перед методом Рунге-Кутта в меньшей трудоемкости вычислений на 1 шаг, т.к. значение 1-ой части исходного дифференциального уравнения вычисляется только один раз. Отметим, что схемы Рунге-Кутта и Адамса можно использовать как в случае *постоянного* шага, так и использовать *переменный* шаг. Поэтому для контроля пра-

вильности выбора шага обычно ведут параллельно вычисления с шагом $\frac{h}{2}$ и если $\left| y_{h/2}^i - y_n^i \right| \leq \varepsilon$ на оставленном $\frac{h}{2}$ считают $y_i = y_{h/2}^i$.

Если условие не выполняется, то решение проводят с $\frac{h}{4}$.

Такой подход к оценке погрешности решения называют правилом Рунге. Схемы (32)-(35) называют **экстрополяционной** формулой Адамса. Для уточнения получаем результат в любой i -той точке значение y_i производится пересчеты по интегральной формуле Адамса:

$$\frac{\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_i}{h} = f_i + \frac{1}{2} \Delta f_{i-1} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{i-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 f_{i-1}, \quad (36)$$

где \tilde{y}_{i+1} - уточненное значение y_{i+1} и если $|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}| \leq 0,0001$ или требуемой ε , то в (6) для дальнейшего счета подставляют вместо y_{i+1} \tilde{y}_{i+1} .

i	x	y	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	Δy_i
0	x_0	y_0	f_0				
1	x_1	y_1	f_1	Δf_1			
2	x_2	y_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_{i1}$		
3	x_3	y_3	f_3	Δf_3	$\Delta^2 f_{i1}$	$\Delta^3 f_3$	

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad i = 3 \text{ по (35) и } \tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + \Delta \tilde{y}_i, \quad i = 3 \text{ по (36).}$$

При **программировании** метода Адамса удобно использовать (35), (36) в виде:

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} + 9f_{i-3})$ - **экстрополяционная** формула Адамса

$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$ - **интерполяционная** формула Адамса.

Для удобства счета (35),(36) можно представить в виде:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (37)$$

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + \Delta \tilde{y}_i, \quad (38)$$

где

$$\Delta y_i = h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta f_i + \frac{5}{12} \Delta f_i^2 + \frac{3}{8} \Delta^3 f_i \right)$$

$$\Delta \tilde{y}_i = h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta f_{i-1} - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{i-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 f_{i-1} \right)$$

5.4.1 Решение систем дифференциальных уравнений методом Адамса

Пусть задана система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}, \quad (39)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ и $z(x_0) = z_0$.

Тогда экстраполяционную формулу Адамса можно записать в виде:

$$\begin{cases} \Delta y_i = p_i + \frac{1}{2} \Delta p_i + \frac{5}{12} \Delta^2 p_i + \frac{3}{8} \Delta^3 p_i \\ \Delta y_i = q_i + \frac{1}{2} \Delta q_i + \frac{5}{12} \Delta^2 q_i + \frac{3}{8} \Delta^3 q_i \end{cases}, \quad (40)$$

где

$$\begin{cases} p_i = h y'_i = h f_1(x_i, y_i, z_i) \\ q_i = h z'_i = h f_2(x_i, y_i, z_i) \end{cases}. \quad (41)$$

И тогда решения находятся по формулам

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ z_{i+1} = z_i + \Delta z_i \end{cases}. \quad (42)$$

Лекция 6

6 Разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

6.1 Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Пусть в области G с границей Γ надо найти решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

$$Ly = y'' - p(x)y - f(x) = 0 \quad x \in [0, l], \quad (1)$$

удовлетворяющего на границе краевым условиям 1-го рода:

$$\begin{cases} y(0) = a \\ y(l) = b \end{cases}. \quad (2)$$

Для численного решения и аппроксимации исходной задачи разностной схемой отрезок $[0, l]$, который разобьем на N частей с шагом $h = \frac{l}{N}$,

$x_i = ih, i = \overline{0, N-1}$ с сеткой $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, N-1}, h = l/N\}$.

Множество внутренних узлов образует сетку:

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = \overline{1, N-1}, h = l/N\},$$

Множество граничных узлов образует сетку: $\gamma_h = \{x_0 = 0, x_N = l\}$,

т.е. отрезок $[0, l]$ непрерывного изменения аргумента заменим сеткой $\bar{\omega}_h$.

На этой сетке выберем трехточечный шаблон (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) и аппроксимируем y'' разностной производной, т.е. заменим оператор $Ly = y''$ разностным оператором $L_h y_h$.

Для достаточно малого шага $h < h_0$ разложим функцию в ряд Тейлора:

$$y_i = y(x_i)$$

$$y_{i+1} = y(x_i + h)$$

$$y_{i-1} = y(x_i - h)$$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x) + O(h^5), x \in \omega_h$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) - \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x) + O(h^5), x \in \omega_h$$

Выразим отсюда $y''(x)$. Для этого достаточно сложить $y(x+h)$ и $y(x-h)$, и получим:

$$y''(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi), y^{(4)}(\xi) - \max(\xi \in [a, b])$$

Следовательно,

$$L_h y_h = y_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Тогда погрешность будет $\psi = |L_h y_h - [Ly]_h| = \frac{h^2}{12} M_4 = O(h^2)$.

Теперь задачу (1),(2) можно аппроксимировать **разностной схемой**

$$L_h y_h = y_{\bar{x}\bar{x}} - p(x_i) - f(x_i) = 0.$$

Или
$$y_{\bar{x}\bar{x},i} - p_i y_i = f_i \quad (3)$$

$$y_0 = a \quad (4)$$

$$y_N = b$$

Здесь $y_i = y(x_i)$ - есть сеточная функция $p_i = p(x_i) \geq c > 0 \Rightarrow 0$, $f_i = f(x_i)$ - заданная непрерывная функция.

Таким образом, исходная задача (1),(2) заменена разностной схемой (3),(4).

6.2 Погрешность аппроксимации. Сходимость и точность схем

Пусть в области G с границей Γ надо найти решение дифференциального уравнения

$$Lu = f(x), \quad x \in G \quad (5)$$

с граничными начальными условиями

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma(x), \quad x \in \Gamma, \quad (6)$$

где $f(x), \mu(x)$ – заданные непрерывные функции; L, l – некоторые линейные дифференциальные операторы.

Предположим, что решение (5), (6) существует и единственно. Область $G + \Gamma$ непрерывного изменения аргумента заменим сеточной областью ω_h .

Пусть h – некоторый векторный параметр, характеризующий плотность расположения узлов в сетке, ω_h – множество внутренних узлов сетки, γ_h – множество граничные узлы сетки. Поставим в соответствие разностную задачу:

$$\begin{cases} L_h y_h = \varphi_h, & x \in \omega_h \\ l_h y_h = \psi_h, & x \in \gamma_h \end{cases}, \quad (7)$$

где φ_h, ψ_h - известные сеточные функции. L_h, l_h - операторы, действующие на сеточные функции, заданные для $x \in \omega_h + \gamma_h = \overline{\omega_h}$.

Решение y_h задачи (7) есть сеточная функция, определяемая в узлах $\overline{\omega_h}$. Меняя h , то есть, выбирая различные сетки, мы получаем множество решений $\{Y_h\}$, зависящих от параметра h . Таким образом, следует рассмотреть семейство разностных схем (7).

Целью всякого приближенного метода является получение решения исходной задачи с заданной точностью $\varepsilon > 0$ за конечное число арифметических действий.

Для выяснения возможности замены решения $y(x)$ задачи (5), (6) приближённым решением y_h задачи (7) с любой степенью точности $\varepsilon > 0$ в зависимости от выбора шага $h(\varepsilon)$, мы должны сравнить $y_h(x_i)$ и $U(x_i)$.

Пусть $U_h = U(x_i)$ – значение $U(x)$ на сетке ω_h так, что $U_h \in H_h$, где H_h – пространство сеточных функций, а H_0 – пространство непрерывных функций. Следовательно, сравнение следует производить в одном из пространств (H_h или H_0).

Будем производить сравнение в пространстве сеточных функций H_h . Так как значение непрерывной функции $y(x)$ достаточно просто вычислить в узлах сетки, в то время как для сравнения функций в пространстве H_0 необходимо $y_h \rightarrow H_0$ (перевести в пространство H_0), то есть сделать дискретную таблицу сеточных функций в виде непрерывных функций) что можно сделать, построив интерполяционный многочлен.

Рассмотрим погрешность разностной схемы (7):

$$z_h = y_h - U_h.$$

Получим условие для z_h . Подставив $y_h = z_h + U_h$ в (7), получим для z_h задачу того же типа, что и для (7):

$$\begin{cases} L_h y_h = \bar{\varphi}_h, & x \in \omega_h \\ l_h y_h = \bar{\psi}_h, & x \in \gamma_h \end{cases}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_h &= \varphi_h - L_h y_h \\ \bar{\psi}_h &= \psi_h - l_h y_h \end{aligned}$$

Правые части $\bar{\varphi}_h$ и $\bar{\psi}_h$ задачи (8) называются **погрешностью** аппроксимации уравнения (5) разностным уравнением (7) и соответственно погрешностью условия (6) разностным условием $l_h y_h = \bar{\psi}_h$ на решение задачи (5), (6).

Обычно говорят: $\bar{\varphi}_h$ – погрешность аппроксимации для разностного уравнения $L_h y_h = \bar{\varphi}_h$ на решение $y(x)$ уравнения (5), $\bar{\psi}_h$ – погрешность аппроксимации условия $l_h y_h = \bar{\psi}_h$ на решение задачи (5), (6).

Любая разностная схема включает в себя разностный аналог исходного дифференциального уравнения и разностные аналоги краевых (начальных) условий.

Для оценки погрешности схемы z_h и погрешности аппроксимации $\bar{\varphi}_h, \bar{\psi}_h$ введём на множестве сеточных функций нормы $\|\cdot\|_{1h}, \|\cdot\|_{2h}, \|\cdot\|_{3h}$ соответственно.

Будем говорить, что решение разностной схемы (7) сходится к решению задачи (5), (6), если $\|z_h\|_{1h} = \|y_h - U_h\|_{1h} \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$ или

$$\|z_h\|_{1h} \leq \rho(\|h\|) \text{ при любом } \|h\| < h_0 \text{ и } \|h\| \rightarrow 0.$$

Разностная схема (7) сходится со скоростью порядка $O(\|h\|^n)$ или имеет n – ый порядок точности, если при достаточно малом $\|h\| < h_0$ выполняется неравенство:

$$\|z_h\|_{1h} = \|y_h - U_h\|_{1h} \leq M \|h\|^n$$

где константа M положительна, не зависит от нормы $\|h\|$ и $n > 0$ – натуральное число.

Говорят, что разностная схема обладает n – ым порядком аппроксимации, если

$$\|\bar{\varphi}_h\|_{2h} = O(\|h\|^n) \text{ и } \|\bar{\psi}_h\|_{3h} = O(\|h\|^n).$$

Если $\bar{\varphi}_h$ – порядка n_1 , а $\bar{\psi}_h$ – порядка n_2 , то порядок погрешности аппроксимации разностной схемы определяется как минимум из порядка погрешности аппроксимации исходного дифференциального уравнения и порядка погрешности аппроксимации краевых (начальных) условий, то есть порядок схемы аппроксимации:

$$n = \min(n_1, n_2).$$

Обозначая f_h и $[LU]_h$ значения $f(x)$ и $LU(x)$ на сетке ω_h , и учитывая из уравнения (5), что $[f - LU]_h = 0$ б запишем в виде:

$$\bar{\varphi}_h = (\varphi_h - L_h U_h) - (f_h - [LU]_h) = (\varphi_h - f_h) + ([LU]_h - L_h U_h) = \bar{\varphi}_h^{-1} - \bar{\varphi}_h^{-2}$$

Таким образом, погрешность аппроксимации исходного уравнения $\bar{\varphi}_h$ складывается из погрешности аппроксимации:

$$\bar{\varphi}_h^{-1} = \varphi_h - f_h$$

и дифференциального оператора:

$$\bar{\varphi}_h^{-2} = [LU]_h - L_h U_h.$$

Отсюда следует, что повысить порядок погрешности аппроксимации дифференциального уравнения можно как за счёт аппроксимации правой части f , так и за счёт дифференциального оператора. Отметим, что порядок точности схемы зависит от порядка погрешности аппроксимации на решении $U(x)$.

Погрешность $z_h = y_h - U_h$ есть решение задачи (8) с правыми частями $\bar{\varphi}_h$ и $\bar{\psi}_h$. Поэтому вопрос о связи порядка точности схемы с порядком аппроксимации находится в зависимости от решения разностной задачи (8) с правой частью.

Если z_h – непрерывно и равномерно по h зависит от $\bar{\varphi}_h$ и $\bar{\psi}_h$, значит схема устойчива, то порядок точности схемы совпадает с порядком её аппроксимации.

Под устойчивостью разностной схемы понимается непрерывная зависимость её решения от входных данных (начальных условий и правых частей).

6.3 Аппроксимация краевых условий третьего рода

Рассмотрим краевую задачу с граничным условием третьего рода. Пусть дано уравнение

$$y'' - p(x) = f(x), \quad (9)$$

удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} y'(0) - \alpha y(0) = a \quad (*) \\ y'(1) + \beta y(1) = b \quad (**) \end{cases}. \quad (10)$$

Уравнение (9) аппроксимируется разностным уравнением

$$y_{xx}^- - p(x_i)y_i = f_i,$$

где

$$p_i = p(x_i), f_i = f(x_i), x_i = ih, \quad (i = \overline{0, N}).$$

Так как

$$y_{xx}^- = y''(x) + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(x), \quad (11)$$

$$\text{то } \bar{\varphi}_h = |L_h y_h - [Ly]_h| = |y_{xx}^- - [y''(x)]_h| = \frac{h^2}{12} y^{(4)}(x) = o(h^2).$$

Следовательно, уравнение (9) аппроксимируется уравнением (11) со вторым порядком аппроксимации, так как $m = 2$.

Так как погрешность исходного уравнения (9) есть величина второго порядка аппроксимации $\bar{\varphi}_h = O(h^2)$, то следует, чтобы разностная схема имела тот же порядок погрешности аппроксимации.

Следует повысить порядок аппроксимации краевых условий (10), например (*). Это возможно сделать двумя способами:

1- аппроксимировать $y''(0)$ на трёхточечном шаблоне, так как на двухточечном шаблоне $y' = y'_x + O(h)$.

2- аппроксимировать на двухточечном шаблоне с использованием исходного уравнения.

На сетке $\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{1}{N} \right\}$ выберем трёхточечный шаблон: (x_0, x_1, x_2)

и представим $y_1 = y(x_0 + h)$, $y_2 = y(x_0 + 2h)$ рядами Тейлора в окрестности точки x_0 .

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0^{(3)} + O(h^4)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!} y_0' + \frac{4h^2}{2!} y_0'' + \frac{8h^3}{3!} y_0^{(3)} + O(h^4)$$

и выразим из них y_0' , исключив y_0'' :

Получим:

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = y_0' + \frac{h^2}{3} y_0^{(3)} = y_0' + O(h^2)$$

Следовательно, граничные условия (*) запишутся в виде:

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} - \alpha y_0 = a.$$

Аналогично, для правой границы получим:

$$\frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h} + \beta y_N = b,$$

представляя y_{N-1} и y_{N-2} рядами Тейлора.

Этот же результат можно получить с помощью неопределённых коэффициентов, если потребовать, например, для условия (*), чтобы

$$\alpha y_0 + \delta y_1 + \gamma y_2 = y'_0 + O(h^2)$$

и для условия (**):

$$\alpha y_N + \delta y_{N-1} + \gamma y_{N-2} = y'_N + O(h^2).$$

Рассмотрим второй способ повышения порядка аппроксимации граничного условия (*) на двухточечном шаблоне:

Из разложения в ряд Тейлора функции $y_1 = y(x_0 + h)$ следует, что

$$y_x = \frac{y_1 - y_0}{h} = y'_0 + \frac{h}{2} y''_0 + O(h^2).$$

Отсюда,

$$y_x - \frac{h}{2} y''_0 = y'_0 + O(h^2)$$

Исходное уравнение (9) справедливо и для точек $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$. Тогда

$$y''_0 = P_0 y_0 + f_0.$$

Следовательно, граничные условия (*) запишутся в виде:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} - \alpha y_0 - \frac{h}{2} (P_0 y_0 + f_0) = a$$

На правой границе граничные условия аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{y_N - y_{N-1}}{h} + \beta y_N + \frac{h}{2} (P_N y_N + f_N) = b$$

Следовательно, погрешность аппроксимации граничных условий (*) или (**) есть величина:

$$\bar{\varphi}_k = |L_h y_h - [LU]_h| = \frac{h^2}{6} y_0^{(3)} + O(h^3) = O(h^2)$$

на трёхточечном шаблоне, то есть второго порядка погрешности аппроксимации.

Аналогично и для двухточечного шаблона:

$$\bar{\varphi}_k = O(h^2).$$

6.4 Метод стрельбы

Пусть требуется найти решение $y = y(x)$ краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} y'' - p(x)y &= f(x) \\ y(0) &= a, y(x) = b \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Решение будем проводить методом стрельбы. Находим частное решение неоднородного уравнения

$$y_0'' - p(x)y_0 = f(x),$$

удовлетворяющее условию $y_0(0) = a$ и частное решение однородного уравнения

$$y_1'' - p(x)y_1 = f(x),$$

удовлетворяющее условию $y_1(0) = a$.

Общее решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее условию $y(0) = a$, имеет вид:

$$y_0(x) + cy_1(x)$$

Значение константы c определяется из условия: $y_0(x) + cy_1(x) = b$.

Решение задачи (12) методом стрельбы заключается в следующем:

Задаются начальные значения $y_0^0 = a$, $y_1^0 = a + o(h)$. для уравнения

$$\frac{y_{i-1}^0 - 2y_i^0 + y_{i+1}^0}{h^2} - p_i y_i^0 = f_i \quad (13)$$

Отсюда выражаем y_{i+1} и, следовательно, последовательно определяем y_2^0 , y_3^0, \dots, y_N^0 . Задавая y_0^1 и y_1^1 из однородного разностного уравнения,

$$\frac{y_{i-1}^1 - 2y_i^1 + y_{i+1}^1}{h^2} - p_i y_i^1 = f_i, \quad (14)$$

последовательно находим $y_2^1, y_3^1, \dots, y_N^1$.

Затем находим константу c из уравнения $y_N^0 + cy_N^1 = b$ на правой границе.

Теперь решение задачи (12) в узлах сетки x_i определяются из уравнения:

$$y_i = y_i^0 + cy_i^1. \quad (15)$$

Сеточная функция является y_i , $i = \overline{0, N}$ является требуемым решением задачи (12). Отметим, что описанный алгоритм формально применим при любых y_0^0 и y_1^1 .

6.5 Метод конечных разностей

Пусть дано линейного дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (16)$$

с краевыми условиями третьего рода

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \delta \end{cases} \quad (17)$$

где $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, $p(x), q(x), f(x)$ – известные непрерывные функции на отрезке $[a, b]$.

Метод конечных разностей заключается в замене этой краевой задачи системой конечноразностных уравнений. Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$, где h - это шаг. На $[a, b]$ вводим сетку:

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = \frac{b-a}{n} \right\}.$$

Для точек x_i искомой функцией $y = y(x)$ и её производных $y'(x)$ и $y''(x)$ введем обозначения:

$$y_i = y(x_i)$$

$$y'_i = y'(x_i).$$

$$y''_i = y''(x_i)$$

Обозначим $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$. На этой сетке выберем трехточечный шаблон:

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \quad \quad \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ | \quad \quad \quad | \\ h \quad \quad \quad h \\ x_{i-1} = x_i - h \quad \quad x_i \quad \quad \quad x_{i+1} = x_i + h \end{array}$$

Разложим функцию y_i в ряд Тейлора в окрестности внутренней точки x_i отрезка $[a, b]$. Запишем:

$$y_{i\pm 1} = y(x_i \pm h) = y_i \pm \frac{h}{1!} y'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i \pm \frac{h^3}{3!} y'''_i + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}_i + O(h^5)$$

Из этого выражения можем выразить y'_i и y''_i и получим:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad y''_i \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (18)$$

Для концевых точек $x_0 = a, x_n = b$, чтобы не выходить за пределы отрезка $[a, b]$ можно взять односторонние разности:

$$y'_0 \approx \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad y'_n \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Если функция $y = y(x)$ достаточно гладкая, то можно получить более точные формулы для краевых условий. Действительно, разлагая в ряд Тейлора $y_1 = y(x_0 + h)$ и $y_2 = y(x_0 + 2h)$ будем иметь:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{1!} y'_0 + \frac{h^2}{2!} y''_0 + \frac{h^3}{3!} y'''_0 + O(h^4)$$

$$y_2 = y_0 + \frac{2h}{1!} y'_0 + \frac{2h^2}{2!} y''_0 + \frac{2h^3}{3!} y'''_0 + O(h^4)$$

Умножим первое уравнение на 4 и вычтем из него второе. Получим:

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = y'_0 + O(h^2).$$

Через $O(h^2)$ обозначается величина погрешности $\psi = O(h^2)$ замены производных разностным отношением, то есть имеет второй порядок погрешности аппроксимации.

Аналогично показывается, что
$$y'_n = \frac{-y_{n-2} + 4y_{n-1} - 3y_n}{2h}. \quad (19)$$

Значит, можем записать:

$$y'_0 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \quad (20)$$

$$y'_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h}. \quad (21)$$

Используя формулы (18) дифференциальное уравнение (16) во внутренних точках $x = x_i$ можно заменить системой линейных уравнений:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (22)$$

Учитывая формулы (20) и (21) краевые условия (17) дают ещё два дополнительных условия:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = \gamma \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} = \delta \end{cases}. \quad (23)$$

Таким образом, получена система $(n+1)$ -ого уравнения с $(n+1)$ -им неизвестным y_0, y_1, \dots, y_n . Группируя коэффициенты при $y_0, y_1, y_2, \dots, y_i, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$ получается обыкновенная система уравнений, решение которой может быть выполнено методом Гаусса.

Полученное решение $y = y(x)$ в узлах сетки $x_i, (i = \overline{0, n})$. Для полученной системы уравнений метод прогонки не применим, так как производные в краевых точках аппроксимируются на трехточечном шаблоне.

6.6 Метод прогонки

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (24)$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \delta \end{cases}, \quad (25)$$

где $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, $p(x), q(x), f(x)$ – известные непрерывные функции на отрезке $[a, b]$.

Заменяем уравнение (24) конечноразностным уравнением. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$, где h – это шаг. На $[a, b]$ вводим сетку:

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_i = a + ih, i = \overline{0, n}, h = \frac{b-a}{n} \right\}.$$

Введем обозначения $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i), y_i = y(x_i)$ и для внутренних точек $x = x_i, (i = \overline{1, n-1})$ уравнение (24) заменим системой конечноразностных уравнений:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad i = \overline{1, n-1}.$$

После группировки членов это уравнение будет иметь вид:

$$A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = \tilde{f}_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (26)$$

где $A_i = 1 - \frac{p_i}{2}h; C_i = 1 + \frac{p_i}{2}h; B_i = -(1 - q_i h^2); \tilde{f}_i = f_i h^2.$ (27)

Для производных на концевых точках $x_0 = a, x_n = b$ возьмем односторонние разности:

$$y'_0 \approx \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad y'_n \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Тогда краевые условия (25) примут вид:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \delta \end{cases} \quad (28)$$

или

$$\begin{cases} B_0 y_0 + C_0 y_1 = \tilde{f}_0 \\ A_n y_{n-1} + B_n y_n = \tilde{f}_n \end{cases}, \quad (29)$$

где $A_0 = 0, A_n = -\beta_1$
 $C_0 = \alpha_1, C_n = 0$
 $B_0 = \alpha_0 h - \alpha_1, B_n = \beta_0 h - \beta_1$
 $\tilde{f}_0 = \gamma h, \tilde{f}_n = \delta h$

В результате приходим к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} B_0 y_0 + C_0 y_1 = \tilde{f}_0 \\ A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = \tilde{f}_i & i = \overline{1, n-1}. \\ A_n y_{n-1} + B_n y_n = \tilde{f}_n \end{cases} \quad (30)$$

Решение системы (30) возможно **методом прогонки**, так как матрица системы уравнений $DY = F$ трехдиагональной структуры.

$$D = \begin{pmatrix} B_0 C_0 & & & & \\ & A_1 B_1 C_1 & & & \\ & & A_2 B_2 C_2 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & A_n B_n \end{pmatrix}.$$

Схема решения системы линейных уравнений методом прогонки приведена в лекции 1.

Лекция 7

7 Решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных

7.1 Сетка и сеточные функции

Для численного решения дифференциального уравнения в частных производных методом конечных разностей необходимо заменить:

- 1) область непрерывного аргумента областью его дискретного изменения;
- 2) его дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, кроме того, сформировать разностный аналог для краевых и для начальных условий.

Множество точек на области называется сеткой. Отдельные точки сетки – узлами сетки. Функция, определенная в узлах сетки, называется сеточной и её значения могут несколько отличаться от функции, полученной путем решения дифференциального уравнения аналитически.

7.2 Равномерная сетка на отрезке

Разобьём $[0,1]$ на N равных частей, расстояние между узлами $\tilde{\omega}_{i+1} - x_i = h = \text{const}$ называется шагом сетки, точки деления $\tilde{\omega}_i = ih$ – узлами сетки. Множество всех узлов $\omega_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{1, N-1}, h = \frac{1}{N} \right\}$ и составляет сетку, введённую на отрезке.

В это множество можно включить и граничные точки x_0 и x_N , и получим сетку $\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{1}{N} \right\}$, т.е. $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$, где γ_h – множество граничных узлов.

На отрезке $[0,1]$ вместо функции непрерывного изменения аргумента $y = y(x)$ будем рассматривать функцию дискретного аргумента $y_h = y(x_i)$. Значение этой функции вычисляется в узлах x_i , она называется сеточной и сама зависит от шага сетки как от параметра.

7.3 Равномерная сетка на плоскости

Рассмотрим множество функций двух аргументов $u = u(x, t)$. В качестве области определения выберем прямоугольник $\bar{D} = \{a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$. Разобьём $[a, b]$ и $[0, T]$ соответственно на N и M равных частей, соответственно с шагами $h = \frac{b-a}{N}$ по оси x , $\tau = \frac{T}{M}$ по оси t .

Через точки деления проведём прямые параллельные соответствующим осям. В результате пересечения этих прямых получим узлы (x_i, t_j) которые образуют сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}$

Эта сетка имеет шаги h и τ соответственно по направлениям x и t . В общем случае сетка выглядит так:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \left\{ x_i = a + ih, i = \overline{0, N}, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}, h = \frac{b-a}{N}, \tau = \frac{T}{M} \right\}.$$

Соседними узлами сетки называются узлы, лежащие на одной и той же прямой расстояние между которыми равно h или τ .

Обычно рассматривается множество сеток $\{\omega_{h_m}\}$, зависящее от шага h как от параметра. Поэтому сеточная функция $y_h(x)$ зависит от шага h как от параметра или количества узлов N .

Если сетка ω_h не равномерна, то под h понимают вектор $h = (h_1, h_2, \dots, h_N, \tau)$ с компонентами $h_1, h_2, \dots, h_N, \tau$. Это относится и к случаю, когда область \bar{D} многомерная, то есть $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. Тогда $h = (h_1, h_2, \dots, h_p)$, если сетка ω_h равномерна по каждому из аргументов x_1, x_2, \dots, x_p .

Пусть в области G функция $U(x)$ непрерывного изменения аргумента и $x \in G$ - является элементом некоторого функционального пространства H_0 . Множество сеточных функций $y_h(x)$ образуют пространство H_h с сеточной функцией $y_h(x)$.

Рассматривая множество сеток $\{\omega_h\}$ получим множество пространств $\{H_h\}$ сеточных функций зависящих от параметра h . На линейном пространстве H_h вводится норма являющаяся сеточным аналогом нормы $\|\bullet\|_0$ в H_0 .

Укажем простейшие типы норм в H_h на множестве сеток. Для случая сеток $\omega_h = \{x_i = ih\}$ на отрезке $[0, 1]$:

1. в пространстве непрерывных функций C :

$$\|y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |y(x)|$$

$$\|y\|_C = \max_{1 \leq i \leq N} |y(x_i)|.$$

2. сеточный аналог нормы в L_2 :

$$\|y\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \text{ или } \|y\| = \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 h \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $U(x)$ решение исходной непрерывной задачи $U \in H_0$, y_h - решение приближенной разностной задачи $y_h \in H$. Для теории приближённых методов интерес представляет оценка близости y_h к $U(x)$. Однако y_h и $U(x)$ являются векторами из разных пространств. Для их сравнения имеются две возможности:

1. сеточная функция, заданная в узлах $\omega_h \in G$ доопределяется во всех остальных точках x области G . (например, линиями или квадратичными интерполяционными многочленами.). В результате. получим функцию $\tilde{y}(x, h)$ непрерывного изменения аргумента и $x \in G$. Разность $\tilde{y}(x, h) - U(x) \in H_0$. Близость y_h к $U(x)$ характеризуется числом или нормой $\|\tilde{y}(x, h) - U(x)\|_0$ в пространстве H_0 .
2. пространство H_0 отображается в пространство H_h , каждой функции $U(x) \in H_0$ ставится в соответствие сеточная функция $U_h(x) = U(x_i)$, когда $x \in \omega_h$, так что $U_h = \mathfrak{R}_h U \in H_h$, где \mathfrak{R}_h - линейный оператор переводящий функцию из H_0 в H_h . Это соответствие можно осуществить различными способами, если $U(x)$ непрерывна то полагают $U_h(x) = U(x)$, $x \in \omega_h$ или $U_h(x) = U(x_i)$, $x_i \in \omega_h$. Иногда U_h в узле x_i определяют как интегральное среднее значение $U(x)$ в окрестности данного узла $x_i \in \omega_h$.

В дальнейшем будем предполагать, что $U(x)$ или $V(x)$ непрерывные функции, и $U_h(x)$ или $V_h(x)$ является сеточной функцией.

Имея сеточные функции U_h и y_h образуем разность $|y_h - U_h|$, которая является вектором в пространстве H_h . Близость y_h к U_h характеризуется нормой $\|y_h - U_h\|$ в пространстве H_h . При этом следует требовать, чтобы $\|\bullet\|_h$ аппроксимировала $\|\bullet\|_0$ в следующем смысле:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|U_h\|_h = \|U\|_0, \quad \forall U \in H_0.$$

Это условие есть условие согласования норм в пространствах H_h и H_0 .

7.4 Численные методы решения дифференциальных уравнений эллиптического типа

Наиболее распространенным уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 0. \quad (1)$$

Если процесс распространения тепла стационарен и имеются источники (стоки) тепла, то приходим к уравнению Пуассона:

$$\Delta U = -f, \quad (2)$$

где $f = \frac{F}{k}$, здесь F – плотность тепловых источников, k – коэффициент температуропроводности.

Для уравнений эллиптического типа ставятся краевые задачи.

Краевая задача для уравнения (2) может быть сформулирована следующим образом:

в ограниченной области D с границей Γ найти решение $U(x)$ уравнения (2), которое удовлетворяет на границе Γ одному из следующих краевых условий:

- первая краевая задача

$$U(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) \quad (3)$$

- вторая краевая задача

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial n} = \varphi_2(x_1, x_2) \quad (4)$$

- третья краевая задача

$$\alpha_0 U(x_1, x_2) + \alpha_1 \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial n} = \varphi_3(x_1, x_2), \quad (5)$$

причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$.

В уравнениях (3) – (5) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - заданные функции. $\frac{\partial U}{\partial n}$ - производная по нормали к контуру Γ . **Первую** краевую задачу (3) для уравнения Лапласа называют **задачей Дирихле**, а **вторую** краевую задачу (4) – **задачей Неймана**.

Решение элементарных дифференциальных уравнений будем проводить методом конечных разностей.

7.5 Первая краевая задача для уравнения Пуассона

Пусть в области D с границей Γ требуется найти решение U удовлетворяющее уравнению Пуассона:

$$-LU = f, \quad (6)$$

где $LU = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}U$, $L_{\alpha}U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_{\alpha}^2}$; $(x_1, x_2) \in D$

и граничному условию

$$U|_{\Gamma} = g(x_1, x_2). \quad (7)$$

Будем считать, что в задаче (6)-(7): $p = 2$.

Пусть область $\bar{D} = D + \Gamma$ есть односвязная ограниченная область D с границей Γ , состоящей из отрезков прямых параллельных осям координат, т.е. прямые параллельные осям координат пересекают границу области в двух точках.

Для численного решения (6)-(7) в области $\bar{D} = D + \Gamma$ введем сеточную область: $\bar{\omega}_h = \left\{ x = (x_1, x_2), x_{\alpha} = a_{\alpha} + i_{\alpha} h_{\alpha}, i_{\alpha} = \overline{1, N_{\alpha}}, \alpha = 1, 2, h_{\alpha} = \frac{l_{\alpha}}{N_{\alpha}} \right\}$. Границу

сетки $\bar{\omega}_h$ обозначим $\gamma_h = \{ x = (x_1, x_2), (x_1, x_2) \in \tilde{A} \}$. Множество узлов

$\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_h - \gamma_h$ называется внутренними узлами, принадлежащими области D , γ_h - множество граничных узлов.

Задаче (6)-(7) поставим в соответствие **разностную** задачу:

$$\Lambda y = -(\Lambda_1 y - \Lambda_2 y) = -\left(y_{x_1 x_1}^- + y_{x_2 x_2}^-\right) = f(x_1, x_2) \quad (8)$$

$$y|_{\gamma_h} = g(x), x = (x_1, x_2) \in \gamma_h. \quad (9)$$

Тем самым задача (6)-(7) аппроксимирована разностной схемой (8)-(9). Здесь Λ_α разностный оператор $\Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha}^-$.

Для схемы (8)-(9) предполагается существование непрерывных производных от решения $U(x)$ до четвёртого порядка включительно. Следовательно, можно показать, что задача (8)-(9) аппроксимирует задачу (6)-(7) на сетке $\bar{\omega}_h$ со вторым порядком аппроксимации по h , т.е. $\psi = O(|h|^2)$ - погрешность, где $|h|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2$.

Разностная задача (8)-(9) на множестве внутренних точек области представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, число которых равно числу внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_h$ и может быть записано

$$AY = F, \quad (10)$$

где Y - искомый вектор, F - известный вектор, A - симметричная в общем случае блочная трёх диагональная матрица.

Рассмотрим вид матрицы A для области $\bar{D} = \{a_\alpha \leq x_\alpha \leq b_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, являющейся прямоугольником. Тогда сетка $\bar{\omega}_h$ имеет вид:

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x = (x_{i_1}, x_{i_2}), x_{i_\alpha} = a_\alpha + i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, h_\alpha = \frac{b_\alpha - a_\alpha}{N_\alpha}, \alpha = 1, 2 \right\}.$$

Для получения системы конечноразностных уравнений задачу (8)-(9) перепишем в индексной форме:

$$\Lambda y_{i_1 i_2} = -\left(\frac{y_{i_1-1 i_2} - 2y_{i_1 i_2} + y_{i_1+1 i_2}}{h_1^2} + \frac{y_{i_1 i_2-1} - 2y_{i_1 i_2} + y_{i_1 i_2+1}}{h_2^2} \right) = f_{i_1 i_2} \quad (11)$$

$$i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \alpha = 1, 2$$

$$y_{i_1 i_2} |_{\gamma_h} = g_{i_1 i_2}, \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \alpha = 1, 2. \quad (12)$$

Задачу (11)-(12) можно решить прямым методом, методом матричной прогонки. Тогда матрица A в системе (10) будет порядка $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$ и запишется так:

$$\lambda_{k_1 k_2} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \left(\frac{k_1 \pi x_1}{2l_1} \right) + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \left(\frac{k_2 \pi x_2}{2l_2} \right),$$

где $k_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}$, $\alpha = 1, 2$, $l_\alpha = b_\alpha - a_\alpha$.

Можем показать, что для оператора Λ имеют место следующие оценки:

$$\delta(y, y) \leq \sum_{\alpha=1}^2 \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \left(\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \right) (y, y) \leq (\Lambda y, y) \leq \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \left(\frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \right) (y, y) \leq \Delta(y, y)$$

$$\delta = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{8}{l_\alpha^2} > 0, \Delta = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{4}{h_\alpha^2}, (u, v) = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} h_1 \sum_{i_2=1}^{N_2-1} u_{i_1 i_2} \times v_{i_1 i_2} h_2$$

Отсюда следует положительная определённость матрицы A , следовательно, система уравнений (10) имеет единственное решение.

Для решения задачи (8)-(9) может быть получена априорная оценка устойчивости:

$$\|y\| \leq \frac{1}{\delta} \|f\|, \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \delta > 0. \quad (18)$$

Из устойчивости схемы и её аппроксимации следует и сходимость разностной схемы со вторым порядком точности.

Пример: Требуется построить разностные схемы для решения уравнения Пуассона

$$\Delta U = -f \quad (19)$$

$$U|_{\Gamma} = g. \quad (20)$$

Функции $U=U(x,y)$, $g=g(x,y)$, $f=f(x,y)$ в области $\overline{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Решение. При решении полагают $h = h_1 = h_2$, и тогда имеем сетку

$$\omega_h = \{x_i = ih, y_j = jh, i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, N-1}\}.$$

Задачу (19)-(20) можно решить прямым методом, методом матричной прогонки, однако здесь применим другие способы ее решения. Задачу (19)-(20) заменим разностной схемой:

$$\left(\frac{y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j}}{h^2} + \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h^2} \right) = -f_{ij}; i, j = \overline{1, N-1} \quad (21)$$

$$y_{ij}|_{\gamma_h} = g_{ij}; i, j = 0, N \quad (22)$$

Разностную схему (21)-(22) будем решать **методом простой итерации** и **методом Зейделя**. Для этого заведём двумерные массивы, заполняя область снизу вверх в начале в граничных точках.

Для начального счёта требуется задать начальное приближение $y_{ij}^{(0)}$.

$$y_{ij} = y_n + (y_n + y_n)x_i; (i = \overline{1,3}); (j = \overline{1,3}).$$

В угловых точках можно взять среднее арифметическое.

Уравнение (21) представим в виде:

$$y_{ij} = \frac{1}{4}(y_{i-1j} + y_{i+1j} + y_{ij-1} + y_{ij+1} + h^2 f_{ij}). \quad (23)$$

Тогда, согласно формуле (23), в методе **простой итерации** $k+1$ итерация вычисляется:

$$y_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(y_{i-1j}^{(k)} + y_{i+1j}^{(k)} + y_{ij-1}^{(k)} + y_{ij+1}^{(k)} + h^2 f_{ij}) \quad (24)$$

Учитывая зависимость (23), для метода **Зейделя** значение $y_{ij}^{(k+1)}$ во внутренних точках сетки определяется соотношением:

$$y_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(y_{i-1j}^{(k+1)} + y_{i+1j}^{(k)} + y_{ij-1}^{(k+1)} + y_{ij+1}^{(k)} + h^2 f_{ij}) \quad (25)$$

Лекция 8

8 Разностные схемы с весами для дифференциальных уравнений теплопроводности

Процесс распространения тепла стержня или пластины описывается дифференциальным уравнением параболического типа или уравнением теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \bar{f}(x,t), \quad (1)$$

где $U(x,t)$ – температура, c – теплоёмкость единицы массы, ρ – плотность материала, λ – коэффициент теплопроводности, \bar{f} – плотность тепловых источников, т.е. количество тепла, выделяющиеся в единицу времени на единицу длины.

Коэффициент теплопроводности и теплоёмкости могут зависеть не только x, t , но и $U(x,t)$. В этом случае (1) называется квазилинейным. Если c, ρ, λ – постоянные, тогда (1) принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \tilde{f}, \quad (2)$$

где $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$, $\tilde{f} = \frac{\bar{f}}{c\rho}$, a – коэффициент температуропроводности. Вводя безразмерные параметры можно привести (1) к виду:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f. \quad (3)$$

В этом случае $[0, l] \rightarrow [0, 1]$, $a^2 = 1$ в общем случае.

Рассмотрим **первую** краевую задачу для (3) в прямоугольнике $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$. Тогда **постановка задачи** сводится: требуется найти решение $U(x,t) \in C(\bar{D})$ удовлетворяющее (I)

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \\ U(0,t) = U_1(t), U(1,t) = U_2(t) - \text{ê} \delta \grave{\alpha} \acute{\alpha} \hat{u} \hat{u} \acute{\alpha} \acute{o} \tilde{n} \acute{e} \hat{i} \hat{a} \grave{e} \grave{y}, \\ U(x,0) = U_0(x), x \in [0,1] - \acute{i} \grave{\alpha} \grave{\alpha} \grave{e} \acute{i} \acute{i} \hat{u} \hat{u} \acute{\alpha} \acute{o} \tilde{n} \acute{e} \hat{i} \hat{a} \grave{e} \grave{y} \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (I)$$

Тем самым задача поставлена.

8.1 Разностная аппроксимация задачи

Введем сетки для переменных x, t соответственно сетки $\bar{\omega}_h, \bar{\omega}_\tau$ и

$$\overline{\omega_{hr}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau} = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = 1/N, t_j = j\tau, j = \overline{0, M}, \tau = 1/M \right\},$$

то есть, сетка прямоугольная. Здесь h, τ соответствующие шаги по координатам x, t . Обозначим y_i^j - значение в узле точки (x_i, t_j) сеточной функции y , определенной на $\overline{\omega_{hr}}$: $y = y_i^j$.

Заменяя производные $\frac{\partial U}{\partial t} = y_t$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = y_{xx}$ и вводя произвольный параметр $\sigma \in [0, 1]$, рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \lambda \left(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j \right) + y_i^j \quad 0 < j \leq M. \quad (4)$$

Здесь φ_i^j сеточная функции, аппроксимирующая правую часть f в (3),

$$\varphi_i^j = f \left(x_i, t_{j+1/2} \right), \quad \lambda y_i^j = y_{xx_i}^j = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}.$$

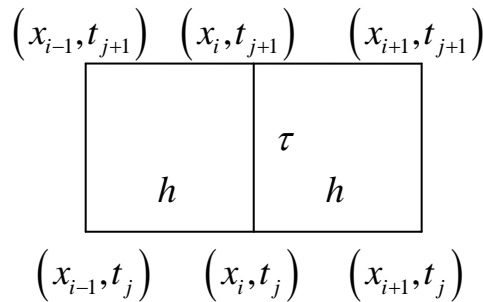
Разностную задачу получим, если аппроксимировать начальные и краевые условия.

$$y_i^0 = U_0(x_i) \quad i = \overline{0, N} \quad (5)$$

$$y_0^{j+1} = U_1^{j+1}, \quad y_N^{j+1} = U_2^{j+1} \quad (6)$$

$$U_1^{j+1} = U_1(t_j + \tau), \quad U_2^{j+1} = U_2(t_j + \tau).$$

Уравнение (4) является разностной аппроксимацией исходного дифференциального уравнения с весом на 6-точечном шаблоне с центром в точке (x_i, t_{j+1}) .



Уравнение (4) записано для внутренних узлов. Множество всех внутренних точек узлов сетки $\overline{\omega_{hr}}$ обозначим $\omega_{hr} = \left\{ (x_i, t_i), i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M-1} \right\}$.

Краевые и начальные условия (5) и (6) пишутся в граничных узлах сетки ω_{hr} . Множество узлов сетки ω_{hr} , лежащих на прямой $t = t_j$ называются **слоями**. Уравнение (4) содержит значение искомой функции y на двух слоях, поэтому и называется двухслойной схемой.

Рассмотрим схемы, соответствующие различным значениям параметра σ . При $\sigma = 0$ получится 4-х точечная **явная разностная** схема, построенная на явном шаблоне.

$$\underbrace{y_i^{j+1} - y_i^j}_{\tau} = \lambda y_i^{j+1} + y_i^j$$

или

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\nu) y_i^j + \nu (y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \nu y_i^j, \quad \nu = \frac{\tau}{h^2}. \quad (7)$$

Значение y_i^{j+1} в любой (каждой) точке нового слоя $t = t_{j+1}$ выражается по явной формуле (7) через значения y_i^j на старом слое $t = t_j$. Так как при $t = 0$ задано начальное условие $y_i^0 = U_0(x_i)$, то формула (7) позволяет последовательно определять значения сеточной функции на нулевом слое. Схема (7) называется явной.

Если $\sigma \neq 0$, то схема (4) называется **неявной двухслойной** схемой.

При $\sigma \neq 0$ для определения y_i^{j+1} на новом слое получаем систему алгебраических уравнений:

$$\sigma \lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = -F_i$$

$$F_i = \frac{1}{\tau} y_i^j + (1 - \sigma) \lambda y_i^j + \varphi_i^j, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (8)$$

с краевыми условиями:

$$y_0^{j+1} = U_1(t_j + \tau)$$

$$y_N^{j+1} = U_2(t_j + \tau)$$

Решение системы (8) находится обычно методом прогонки.

При $\sigma = 1$ получается схема с опережением или чисто **неявная** схема:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \lambda y_i^{j+1} + y_i^j \quad (9)$$

При $\sigma = \frac{1}{2}$ получим 6-тигочечную симметрическую схему **Кранка-Николсона**:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} \lambda (y_i^{j+1} + y_i^j) + \varphi_i^j. \quad (10)$$

Для решения задачи при $\sigma = 0$ следует воспользоваться равенствами (7) с начальными и краевыми условиями (5) и (6). При $\sigma = \frac{1}{2}$ или 1, на любом слое сетки строится система алгебраических уравнений с 3-х диагональной матрицей, которая решается методом прогонки.

8.2 Погрешность аппроксимации

Для оценки точности схемы (4)-(6) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j + U_i^j$, где y_i^j – есть решение разностной схемы (4)-(6), U_i^j – решение задачи (I) в узлах сетки, z_i^j – погрешность аппроксимации.

Для оценки сеточной функции z_i^j на слое выберем одну из норм:

$$\|z\| = \|z\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |z_i^j| \quad \text{или} \quad \|z\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} (z_i^j)^2 h \right)^{\frac{1}{2}}$$

Обозначим $y = y_i^j$, $y_i^{j+1} = \bar{y}$, $y_t = \frac{\bar{y} - y}{\tau}$. Запишем (4)-(6) в виде:

$$\begin{cases} y_t = \lambda(\sigma \bar{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi & (x, t) \in \omega_{hr} \\ y(0, t) = U_1(t), \quad y(1, t) = U_2(t) & t \in \omega_{hr} \\ y(x, 0) = U_0(x) \end{cases} \quad (\text{II})$$

Найдем условия, определяющие $z = y - U$. Подставим $y = z + U$ схемы (II) в (2):

$$\begin{cases} z_t = \lambda(\sigma \bar{y} + (1 - \sigma)z) + \varphi & (x, t) \in \omega_{hr} \\ z(0, t) = z(1, t) = 0 & t \in \omega_{hr} \\ z(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III})$$

Получим решение $\psi = \lambda(\sigma \bar{U} + (1 - \sigma)U) - U_t + \varphi$ (11) – погрешность аппроксимации (II) на решении $U(x, t)$ задачи (I). Получим оценку порядка аппроксимации системы (II), $U = U(x, t)$ имеет необходимое число производных по x и t . Предположим:

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad U' = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \hat{U} = U\left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}\right).$$

Разлагая в ряд Тейлора $U\left(x, t + \frac{1}{2}\tau\right)$ в окрестности этой точки и пользуясь формулами:

$$\hat{U} = \frac{1}{2}(\hat{U} + U) + \frac{1}{2}(\hat{U} - U) = \frac{1}{2}(\hat{U} + U) + \frac{1}{2}\tau U_t$$

$$U = \frac{1}{2}(\bar{U} + U) - \frac{1}{2}\tau U_t$$

$$\sigma \hat{U} + (1 - \sigma)U = \frac{1}{2}(\bar{U} + U) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau U_t$$

Учитывая это, перепишем ψ в виде:

$$\psi = \frac{1}{2}\lambda(\hat{U} + U) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\lambda\tau U_t - U_t + \varphi \quad (*)$$

Подставляя $\lambda U = U'' + \frac{h^2}{12}U^{(4)} + O(h^2)$ из разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\lambda U &= LU + \frac{h^2}{12}L^2U + O(h^4) \\ LU &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ \psi &= \lambda(\sigma\bar{U} + (1-\sigma)U) - U_t + \varphi,\end{aligned}\quad (11)$$

где $U = \bar{U} - \frac{1}{2}\tau\bar{U}' + \frac{1}{8}\tau^2\bar{U}'' + O(\tau^3)$, $U_t = \bar{U}' + O(\tau^2)$ подставим в формулу (*), получим:

$$\psi = (L\bar{U} - \bar{U}' + \varphi) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\bar{U}' + \frac{h^2}{12}L^2U + O(\tau^2 + h^4) \quad (12)$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned}\psi &= \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau L\bar{U}' + \frac{h^2}{12}L^2U + O(\tau^2 + h^4) \\ \varphi &= \bar{f} = f(x_i, t_{j+0.5}) \text{ и } \bar{U}' = L\bar{U} + \varphi \\ L\bar{U}' &= L^2U + Lf = U^{(4)} + Lf \\ L^2U &= L\bar{U}' - Lf \\ \psi &= (\varphi - \bar{f}) = \left[\bar{L}\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau + \frac{h^2}{12}\right]L\bar{U}'\end{aligned}\quad (13)$$

Приравняем к нулю выражение в (13). Найдём

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma_*. \quad (14)$$

При таком значении $\sigma = \sigma_*$ схема (III) имеет аппроксимацию повышенного порядка точности $O(h^4 + \tau^2)$, если предположить, что

$$\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}Lf. \quad (15)$$

Пусть $C_n^m(D)$ – класс функций, имеющих m производных по x и n по t непрерывных в \bar{D} . Из формул (13) и (14) ясно, что схема (II) имеет аппроксимацию:

- 1) порядка $O(h^2 + \tau^2)$ при $\sigma = \frac{1}{2}$, $\varphi = \bar{f}$, если $U \in C_3^4$.
- 2) Порядка $O(h^2 + \tau)$ при $\sigma \neq \frac{1}{2}$ и $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau)$, если $U \in C_2^4$
- 3) Порядка $O(h^2 + \tau^2)$ при $\sigma = \sigma_*$ и функции, заданной формулой (15), если $U \in C_3^6$.

Выбор правой части должен быть подчинен требованию соблюдения порядка аппроксимации при данном σ .

9 Разностные схемы с весами для уравнения колебания струны

9.1 Постановка задачи и разностная аппроксимация

Рассмотрим уравнение колебаний однородной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f_1(x_1, t_1) \quad 0 \leq x_1 \leq l, \quad t_1 > 0.$$

Вводя безразмерные величины $x = \frac{x_1}{l}$, $t = \frac{at_1}{l}$, перепишем его:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

Для решения этого уравнения в начальный момент времени (при $t = 0$) заданы уравнения

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \overline{u_0}(x), \quad (2)$$

где $u_0(x)$ начальное отклонение, а $\overline{u_0}(x)$ начальная скорость движения струны.

Концы струны движутся по заданным законам:

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t). \quad (3)$$

Введем в области $\overline{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ прямоугольную сетку $\overline{\omega_{ht}} = \{x_i = ih, \tau = 0, N, t_j = j\tau, j = 0, M, \tau = T/M, h = 1/N\}$. Так как уравнение (1) содержит вторую производную по t . Таким образом число слоев не может быть меньше трех.

Введем обозначение:

$$\begin{aligned} \overline{y} &= y_i^j, \quad \overline{\overline{y}} = y_i^{j+1} \\ y_t &= \frac{\overline{y} - \overline{\overline{y}}}{\tau}, \quad \overline{y}_t = \frac{y - \overline{y}}{\tau}, \quad \Delta y = y_{xx} \\ y_{tt} &= \frac{y_t - \overline{y}_t}{\tau} = \frac{\overline{y} - 2\overline{\overline{y}} + \overline{\overline{\overline{y}}}}{\tau^2}, \\ \Delta Y &= \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}, \\ y_z^0 &= \frac{\overline{y} - \overline{\overline{y}}}{2\tau} \end{aligned}$$

Заменяем производные, входящие в (1), по формулам

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx u_{tt}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx u_{xx}, \quad f \sim \varphi.$$

Задача (1)- (3) аппроксимируем семейством схем с весами:

$$\begin{cases} y_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma \bar{y} + (1-2\sigma)y + \sigma \bar{\bar{y}}) + \varphi, \quad \varphi = f(x, t) \\ y_0 = \mu_1(t), \quad y_N = \mu_2(t) \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(y) \end{cases} \quad (4)$$

Краевые условия и первое начальное условие $u(x, 0) = u_0(x)$ на сетке $\bar{\omega}_h$ выполняется точно. Для повышения порядка аппроксимации второго начального условия выберем $\tilde{u}_0(x)$ так, чтобы погрешность аппроксимации:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x) &= \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x) - \bar{u}_0(x) \text{ была величиной порядка } O(\tau^2). \text{ Из формулы} \\ u_t(x, 0) &= \bar{u}(x, 0) + \frac{\tau}{2} u''(x, 0) + O(\tau^2) = \bar{u}_0(x) + \frac{\tau}{2} (u''(x, 0) + f(x, 0)) + O(\tau^2) = \\ &= \bar{u}_0(x) + \frac{\tau}{2} (u_0''(x) + f(x, 0)) + O(\tau^2) \end{aligned}$$

видно, что $\tilde{u}_0(x) - u_t(x, 0) = O(\tau^2)$ если потребовать, чтобы

$$\tilde{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + \frac{\tau}{2} (u_0''(x) + f(x, 0)). \quad (5)$$

Таким образом, разностная задача (4)-(5) поставлена.

Для определения $\bar{y} = y_i^{j+1}$ получим из (4) краевую задачу

$$\begin{cases} \sigma \gamma^2 (y_{i+1}^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}) - (2\sigma \gamma^2 + 1) y_i^{j+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1} \\ y_0 = \mu_1 \\ y_N = \mu_2, \quad \gamma = \tau/h \\ F_i = (2y_i^j - y_i^{j-1}) + \tau^2 (1-2\sigma) \Lambda y_i^j + \sigma \tau^2 \Lambda y_i^{j-1} + \tau^2 \varphi \end{cases} \quad (6)$$

которая решается методом прогонки при $\sigma > 0$.

9.2 Погрешность аппроксимации. Вычислительная схема решения задачи

1) Выбираем шаги h, τ или M, N из условия требуемой точности получения решения, и для явной схемы из условия устойчивости.

2) На нулевом слое $t = 0, j = 0$ вычисляются значения сеточной функции $y_i^0 = u_0(x_i), i = \overline{0, N}$.

3) Из второго начального условия вычисляются значения сеточной функции y_i^1 на первом слое во внутренних точках слоя по формуле, полученной из второго начального условия

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \bar{u}_0(x), \text{ следовательно } y_i^1 = y_i^0 + \tau \bar{u}_0(x), \quad i = \overline{1, N-1},$$

где y_0^1 и y_N^1 определяются из краевых условий $y_0^1 = \mu_1(\tau), y_N^1 = \mu_2(\tau)$.

4) Для любого $j = \overline{1, M-1}$ вычисляются значения сеточной функции y_i^{j+1} из решения системы уравнений (6) методом прогонки в случае $\sigma > 0$.
Если $\sigma = 0$, то получается явная пятиточечная схема.